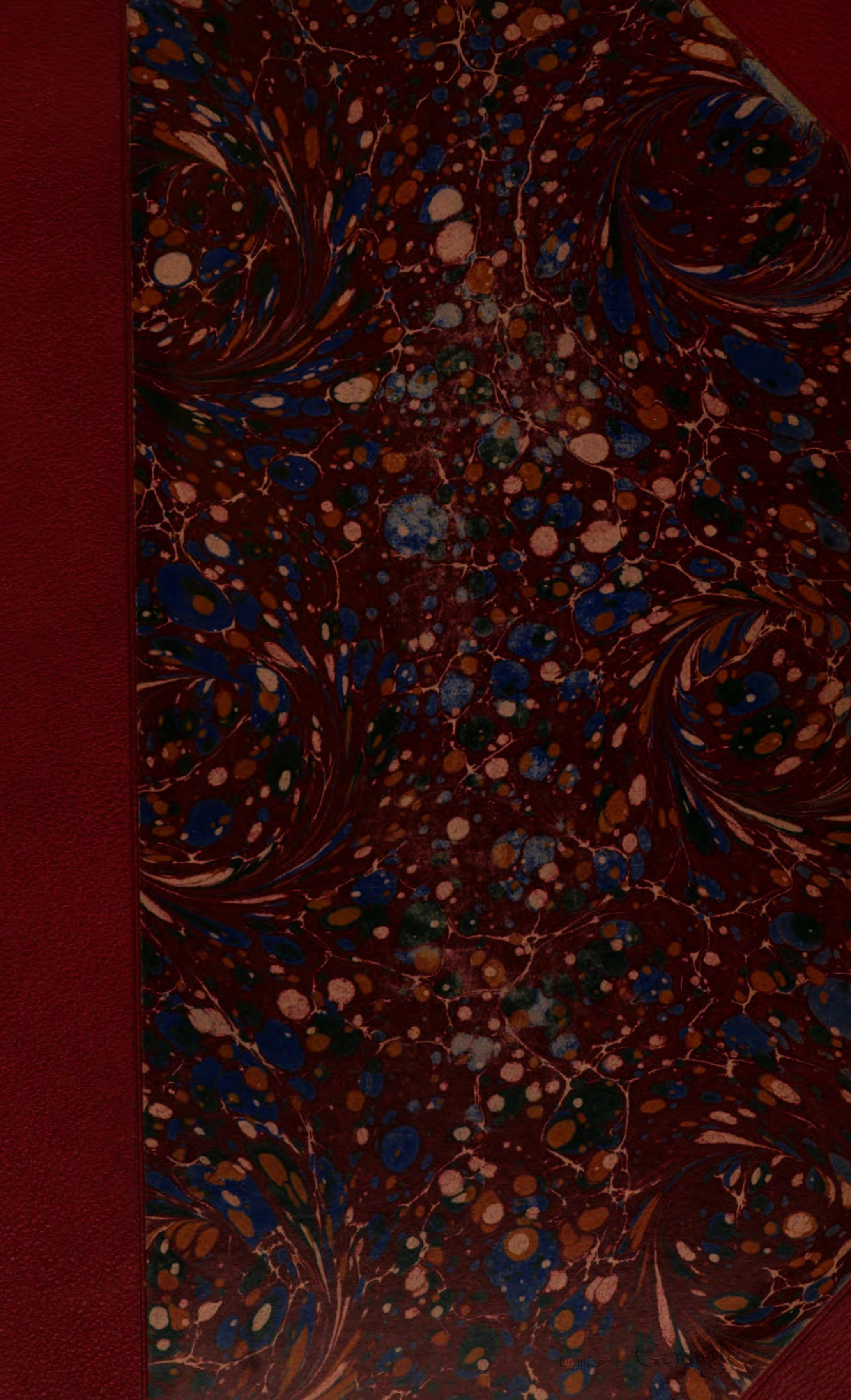



ACADEMIAE HARVARDIANAE
ET
VE RI TAS
CHRISTO ECCLESIAE
SIGILLVM IN NOV ANG



SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem
vera dissensio esse potest.

CONST. DE FID. CATH., c. IV.

TREIZIÈME ANNÉE, 1888-1889

BRUXELLES

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

1889

Pierce fund.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

COMMUNICATIONS DIVERSES.

CONFÉRENCES.

AUTEURS.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

AUTEURS.

QUESTIONS AU CONCOURS.

1° *On demande des recherches nouvelles sur des combinaisons renfermant le noyau* $C_n - C_6H_5$.

2° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

3° *Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.*

4° *Étudier la fixation de l'azote par le sol et par la plante, au point de vue biologique et agricole.*

Le 1er octobre 1891 est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

ARTICLE 1er. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (1). »

ART. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

ART. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

ART. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath., c. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

Art. 6. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels, et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier.

Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique, ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*, II. *Sciences physiques*, III. *Sciences naturelles*, IV. *Sciences médicales*, V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et les séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

---

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales* s'il y a lieu.

NOTE. — Le tirage au sort, ordonné par l'article 3, a rangé les sections dans l'ordre suivant : 2e, 4e, 3e, 5e et 1re.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae.

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV[a] de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut

nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15. Ianuarii 1879. Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO P. P. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE.

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant

à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

Liste des membres fondateurs.

S. E. le cardinal DECHAMPS (¹), archevêque de. .	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE (¹).	Malines.
Charles DESSAIN	Malines.
Jules VAN HAVRE (¹)	Anvers.
Le chanoine MAES (¹)	Bruges.
Le chanoine DE LEYN	Bruges
LEIRENS-ELIAERT	Alost.
Frank GILLIS (¹)	Bruxelles.
Joseph SAEY	Bruxelles.
Le Cher DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL.	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX	Namur.
Le duc D'URSEL, sénateur (¹)	Bruxelles.
Le Pce Gustave DE CROY (¹)	Le Rœulx.
Le Cte DE T'SERCLAES (¹)	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (¹)	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE CONCEPTION	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS.	Liège.
Le Cte DE BERGEYCK	Beveren-Waes.

(¹) Décédé.

L'Institut Saint-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège d'Alost	Alost.
Le chanoine de Wouters	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
S. E. le cardinal Haynald, archevêque de Kalocsa et Bàcs	Kalocsa (Hongrie).
S. E. le cardinal Séraphin Vannutelli	Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux, évêque de	Tournay.
S. E. le cardinal Goossens, archevêque de . . .	Malines.
R. Bedel	Aix.
S. G. Mgr Belin, évêque de.	Namur.
Eugène Pecher.	Bruxelles.
S. G. Mgr Ferrata, archevêque de Thessalonique	Rome.
S. Exc. Mgr Nava di Bontifè, nonce apostolique	Bruxelles.

Liste des membres honoraires.

Le Pce B. Boncompagni, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei	Rome.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
Charles Hermite, membre de l'Institut	Paris.
Le général Newton	New-York.
Le docteur Foerster	Aix-la-Chapelle.
A. de Lapparent	Paris.
A. Béchamp	Lille.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut .	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières, membre de l'Institut.	Paris.
Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
L de Bussy, membre de l'Institut.	Paris.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles.

—

d'Abbadie (Antoine), membre de l'Institut, 120, rue du Bac. — Paris; ou Abbadia par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Abbeloos (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique de l'Université. — Louvain.

d'Acy (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.

Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).

Alcolado, S. J. (R. P. Miguel), professeur d'analyse, Colegio de Estudios superiores. — Deusto (Bilbao — Espagne).

Alexis, M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.

Alfageme (José), catedrático de Fisica y Quimica en el Instituto. — Santiago (Espagne).

Allard (François), industriel. — Châtelineau.

Almain-de Hase, ingénieur-architecte, 157, rue de la Loi. — Bruxelles.

André (J.-B.), inspecteur au ministère des travaux publics, 93, avenue Brugmann. — Uccle.

Arcelin (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).

Arduin (abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

Baguet (Charles), avocat, receveur de l'Université, 6, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Baillon, 10-11, place de la Calandre. — Gand.

Balaguer (Vicente), rector del Seminario Conciliar. — Huesca (Aragon. — Espagne).

Barcia Caballero (Juan), catedratico de diseccion en la Universidad, Puerta de la Peña, 10. — Santiago (Espagne).

Bardin (abbé Louis), professeur de géologie à la Faculté, 21, rue Brault. — Angers (Maine-et-Loire — France).

di Bartolo (Canonico Salvatore), via della Libertà, 1. — Palermo (Sicile).

Baule (Albert), lieutenant de vaisseau, 133, chemin de Magudas. — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France).

Bayet (Adrien), 30, nouveau marché aux Grains. — Bruxelles

Bayet (Ernest), 58, rue Joseph II. — Bruxelles.

BEAUCOURT (abbé Léopold), curé des Écaussinnes d'Enghien.
DE BEAUFFORT (Cte Henri), 125, rue de Grenelle. — Paris; ou château de Bossuyt, par Avelghem (Flandre-Occidentale).
BÉCHAMP, doyen de la Faculté catholique de médecine, 36, rue des Fossés. — Lille (Nord — France).
BEDEL (abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire d'Aix (Bouches-du-Rhône — France).
BELIN (S. G. Mgr), évêque de Namur.
BELLEMANS (Charles), comptable, 46, courte rue d'Argile. — Anvers.
BELPAIRE (Théodore), directeur du service provincial, 18, rue des Sœurs-Noires. — Gand.
DE BERGEYCK (Cte), château de Beveren-Waes (Flandre-Orientale).
BERLEUR (Adolphe), ingénieur, 17, faubourg Saint-Laurent. — Liège.
BERLINGIN (Melchior), directeur de l'usine de la Vieille-Montagne. — Penchot (Aveyron — France).
BERTRAND (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
BÉTHUNE-ELIAERT (Bon), sénateur, rue du Pont. — Alost.
BÉTHUNE (Mgr Félix), rue d'Argent. — Bruges.
BICHOT (Abbé), professeur au Petit-Séminaire, 19, rue N.-D. des Champs. — Paris.
BLONDEL (Alfred), ingénieur, 14, rue de la Magdeleine. — Tournay.
BLONDIAUX (Auguste), à Morialmé (Namur).
BLOT (abbé), 23, avenue de Messine. — Paris.
DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES (Mis), 23, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).
BONAMIS (Florimond), ingénieur. — Jambes (Namur).
BONCOMPAGNI (Pce B.), de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, palazzo Piombino, piazza Colonna. — Rome.
BORGINON (Gustave), docteur en médecine, 58, rue Dupont. — Bruxelles.
DE BORMAN (Cher Ernest), 56, rue de la Commune. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).
BOSSU (abbé L.), professeur à l'Université, rue de Bériot. — Louvain.
BOULAY (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 127, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
BOUQUILLON (abbé Th.), Catholic University of America. — Washington (Brookland, D. C. — États-Unis d'Amérique).
BOURDEAU (Abel), médecin de bataillon de 1re classe, École des Pupilles de l'armée. — Alost.

Bourgeat (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

Boussinesq, membre de l'Institut, 1, rue Claude-Bernard. — Paris.

du Boys (Paul), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Annecy (H[te]-Savoie — France).

Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 42, avenue de Breteuil. — Paris.

Brassine (J.-J.), général commandant la 2[e] division d'infanterie. — Anvers.

Breithof (N.), professeur à l'Université, rue de Bruxelles. — Louvain.

Bribosia, docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine, 16, rue Neuve. — Namur.

Brockman (Guillermo), hijo. — Pachuca (Estado de Hidalgo — Mexique).

Bruylants, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, rue de Malines. — Louvain.

Buisseret (Anatole), préfet des études au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.

Buisseret (Joseph), professeur au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.

de Bussy (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.

Cambier (Vital), industriel. — Morlanwelz (Hainaut).

Canfyn (Albert), 3, place du Lion d'Or. — Gand; ou Evergem près Gand.

Cappellen (Guillaume), avocat, 4, place Marguerite. — Louvain.

Carnoy (Joseph), professeur à l'Université, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Cartuyvels (Mgr), vice-recteur de l'Université. — Louvain.

Cartuyvels (Jules), directeur au ministère de l'agriculture, 40, rue Breydel. — Bruxelles.

Casarès (Demetrio), farmaceutico. — Santiago (Galice — Espagne).

Casarès (Firmino), en la Coruña (Espagne).

Charlier (Ernest), docteur en médecine, 4, rue de la Cuiller. — Bruxelles.

du Chastel (C[te] Henri), 55, rue de Trèves. — Bruxelles.

Chautard, doyen de la Faculté catholique des sciences, 3, rue Saint-Martin. — Lille (Nord — France).

Claes (Paul), 79, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

CLASEN (abbé B.-I.), curé doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).
COGELS (J.-B.-Henri), 38, longue rue de l'Hôpital. — Anvers.
COLLANTES (Pedro), licenciado, calle del Esclavo, n° 10. — Mexico (Mexique).
COLLANTES (Dr. Juan de Dios), calle de las Moras, n° 18. — Mexico (Mexique).
COLLÈGE D'ALOST, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
COLLÈGE NOTRE-DAME DE LA PAIX. — Namur.
COLLÈGE SAINT-MICHEL. — Bruxelles.
COLLÈGE SAINT-SERVAIS. — Liège.
COOLS (Auguste), ingénieur. — Lierre.
COPPIETERS DE STOCKHOVE (abbé Ch.), vicaire à Sainte-Walburge. — Bruges.
DE CORSWAREM (Cher Adrien), avocat. — Hasselt.
COUSIN (L.), professeur à l'Université, conseiller technique du gouvernement chilien, 95, calle Santo Domingo. — Santiago (Chili).
CRANINCX (Oscar), 41, rue de la Loi. — Bruxelles.
CRANINCX (P.-J.-E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine. — Louvain.
DE CROY (Pce Juste), 53, rue de la Loi. — Bruxelles; ou Le Rœulx.
CUYLITS (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DAVIGNON (Julien), 35, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
DE BAETS (Herman), 16, rue du Bélier. — Gand.
DEBAISIEUX, professeur à l'Université. — Louvain.
DE BECKER (abbé Jules), professeur à l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.
DE BLOO (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.
DE BROUWER (abbé), supérieur du Petit-Séminaire. — Roulers.
DE BRUYN (Jules), 171, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
DE DECKER (Eugène), membre de la Chambre des Représentants, 34, rue de Vénus. — Anvers.
DE GREEF, S. J. (R. P. Henri), 11, rue des Récollets. — Louvain.
DE JAER (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DE JAER (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes. — Mons.
DE LANTSHEERE (Léon), avocat, 210, rue du Trône. — Bruxelles.

Delattre, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Delebecque-Vergauwen, 12, rue aux Draps. — Gand.
De Leyn (chan. A.), 52, rue du Marécage. — Bruges.
De Lorge (abbé J.), professeur au Séminaire. — Roulers.
Delsaulx, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège N.-D. de la Paix. — Namur.
Delvigne (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.
Demanet (abbé), professeur au Collège de Bellevue. — Dinant.
De Meester (Augustin), propriétaire. — Saint-Nicolas.
Deploige (Simon), docteur en droit. — Tongres.
De Preter (Herman), ingénieur, 28, boulevard du Jardin Botanique. — Bruxelles.
De Prins, place du Peuple. — Louvain.
Descamps (abbé A. J.), inspecteur des Écoles du canton de Mons, curé d'Harmignies (Hainaut).
Desplats (docteur), professeur aux Facultés catholiques, 52, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
Detierre (abbé), aumônier de l'École militaire, 170, rue de la Loi. — Bruxelles.
De Tilly (colonel J.), de l'Académie royale de Belgique, commandant de l'École militaire. — Bruxelles.
Dewalque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Dewalque (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liège.
Dierckx (P.), membre de la Chambre des Représentants. — Turnhout.
Dincq-Jordan, ingénieur et industriel, Pont-Canal, Jemappes (par Mons-Station).
Dobbet (Ferdinand), avocat, membre de la Chambre des Représentants, place St-Aubin. — Namur.
Dollo (Louis), aide-naturaliste au Musée d'histoire naturelle de Belgique, 69, rue du Cornet. — Etterbeek (Bruxelles).
de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux, par Floreffe (Namur).
de Dorlodot (H.), docteur en théologie, professeur au Grand-Séminaire. — Namur.
Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 57, Coupure. — Gand.

Dumont (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Dumont (André), professeur à l'Université, 13, rue de la Laie. — Louvain.

Durant (Henri), inspecteur-général des charbonnages patronnés par la Société générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Du Roussaux (S. G. Mgr), évêque de Tournay.

Dusausoy (Clément), professeur à l'Athénée royal, 117, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dutordoir (Hector), sous-ingénieur provincial, 311, boulevard du Château. — Gand.

École libre Sainte-Geneviève, rue Lhomond. — Paris.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard, Paris.

de l'Escaille (Joseph), ingénieur. — Hamont, par Neerpelt (Limbourg).

Eynaud, ingénieur de la marine, directeur des constructions navales. — Lorient (Morbihan — France).

Faucon (A.), docteur en médecine. — Le Rœulx.

Fauvel (Albert A.), 15, avenue de Breteuil. — Paris.

Fauvel (Emmanuel), contrôleur des contributions directes, 6, rue du Château. — Saint-Lô (Manche — France).

Feijeiro (Maximino), catedrático de Patologia y Clinica en la Universidad. — Santiago (Espagne).

Félicien (Monsieur), supérieur-général des Joséphites. — Grammont.

Feliù y Perez (Bartolomé), profesor en la Universidad, calle del Bruch, 31. — Barcelona (Espagne).

Fernandez Sanchez (José), catedrático de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

Ferrand de Missol (Amédée), 40, boulevard Montparnasse. — Paris.

Ferrata (S. G. Mgr), archevêque de Thessalonique, ancien nonce du S. Siége en Belgique, palazzo Ballestra, place des SS. Apôtres. — Rome.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), calle del Lobo, 34, pral. — Madrid (Espagne).

Floren (Gustave), 15, Sydney street. — Londres.

Foerster (Dr), professeur d'histoire naturelle. — Aix-la-Chapelle.

Fontaine (Théodore), professeur à l'Université, 14, rue des Orphelins. — Louvain.

Forni (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).

de Foville (abbé), professeur à l'Université. — Montréal (Canada).

François, S. J. (R. P. Alexis), professeur au Collège de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liège.

Gallez (Louis), docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine. — Châtelet.

de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — Paris.

Gautier (chanoine), 79, rue Notre-Dame. — Malines.

Gelin (abbé), professeur au collège Saint-Quirin. — Huy.

George, S. J. (R. P. Charles), 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

de Gerlache (Paul), gouverneur de la province de Luxembourg. — Arlon.

Gerste, S. J. (R. P.), sacristia de las Capuchinas, 5. — Puebla (Mexique).

Gilbert (Jules), industriel. — Givet (Ardennes — France).

Gilbert (Ph.), professeur à l'Université, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, membre correspondant de l'Institut, 20, rue Notre-Dame. — Louvain.

Goedseels (Édouard), lieutenant, répétiteur à l'École militaire, 48, avenue de l'Hippodrome. — Ixelles.

Goix (Alph.), docteur en médecine, 40, rue de Joinville. — Paris.

Goossens (S. E. le cardinal), archevêque de Malines.

Goris (Charles), docteur en médecine, 143, rue Royale. — Bruxelles.

de Granada (S. Exc. Mgr le Duc), cuesta de Santo Domingo, n° 5. — Madrid (Espagne).

Grandmont (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile).

Granero, S. J. (R. P. Juan), colegio de N. Sra del Recuerdo, Chamartin de la Rosa. — Madrid (Espagne).

Gredilla (Apolinar Federico), docteur en sciences naturelles, aide-naturaliste au Musée de Madrid, rue de Leganitos, n° 23, 3°. — Madrid (Espagne).

Greindl (Bon Gustave), 20, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Grenier (Gustave), propriétaire, 78, rue de la Station. — Louvain.

Grinda (Jesus), ingénieur des ponts et chaussées, Valverde, 22, 2°. — Madrid (Espagne).

Grisar (Armand), 5, rue Hoboken. — Anvers.

DE GROSSOUVRE (A.), ingénieur des mines. — Bourges (Cher — France).
DE GRUNNE (Cte François), capitaine d'artillerie, 65, rue Belliard. — Bruxelles.
GUYÉTAND, professeur de physique, École libre de Mont-Roland. — Dôle (Jura — France).
HAAN, docteur en médecine, professeur à l'Université, 133, rue de Tirlemont. — Louvain.
HAHN, S. J. (R. P. Guillaume), professeur à l'Université, University College, St. Stephen 's Green. — Dublin (Irlande).
HAMARD (chan.), 12, rue des Dames. — Rennes (Ille-et-Vilaine — France).
HANQUET (Ferdinand), 16, rue du Laveu. — Liège.
DE HARLEZ (Mgr), professeur à l'Université, 8, rue au Vent. — Louvain.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J. N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, 60, boulevard Saint-Michel. — Paris.
DE HAULLEVILLE (Bon), 97, rue Belliard. — Bruxelles.
DE LA HAYE (Auguste), capitaine en 1er au 11e régiment de ligne. — Liège.
HAYNALD (S. E. le cardinal), archevêque de Kalocsa et Bàcs (Hongrie).
DE HEMPTINNE (Cte Joseph), fils, 31, rue Charles-Quint. — Gand; ou Tamise (Flandre Orientale).
HENRY (Hector). — Dinant.
HENRY (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.
HERMITE (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.
HERVIER (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).
HEYMANS (J.-F.), docteur en sciences, assistant à l'Institut physiologique, Dorotheenstrasse. — Berlin (Allemagne).
HOUTART (Jules). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).
HOUZE (Octave), docteur en médecine. — Binche.
ICAZBALCETA (Joaquín Garcia), Apartado del Correo. 366. — Mexico (Mexique).
IMPERIALI (Mlle), des Pces de Francavilla, 10, rue Montoyer. — Bruxelles; ou château d'Hamal par Tongres.
IÑIGUEZ É IÑIGUEZ (Francisco), catedratico de Astronomia en la Universidad, calle de Jardines, 18. — Madrid (Espagne).
INSTITUT SAINT-IGNACE. — Anvers.

JACMART, lieutenant-général, membre de la Chambre des Représentants, 21, rue Geefs. — Schaerbeek.

JACOBS (Mgr), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.

JANNET (Claudio), professeur aux Facultés catholiques, 11, rue las Cases. — Paris.

JANSSENS, docteur en médecine. — Puers (Anvers).

JENNER (Ch. I.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, directeur des travaux hydrauliques de la marine, 38, rue de la Rampe. — Brest (Finistère — France).

JIMENO (Joaquin), ingeniero de caminos. — Castellon de la Plana (Espagne).

JOLLY (B^on^), lieutenant-général, commandant la 1re circonscription militaire. — Anvers.

JOLY (Léon), avocat, 18, rue Caroly. — Bruxelles.

DE JONQUIÈRES, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud. — Paris.

JORDAN (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne. — Paris.

JOURDAIN (Louis), ingénieur, 19, rue Léopold. — Bruxelles.

KENNIS (Guillaume), ingénieur, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek.

KIRSCH (R. P. Alexandre M.) C. S. C. — Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

DE KIRWAN (Charles), ancien inspecteur des forêts, 7, rue de l'Orangerie. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

KURTH (Godefroid), professeur à l'Université, 62, rue Lairesse.—Liège.

LACOMPTE (Camille), docteur en médecine. — Tamise.

LACOR (E.), professeur de mathématiques à l'École Sainte-Geneviève, 133, boulevard Raspail. — Paris.

LAGASSE (Alexandre), pharmacien, 4, rue Saint-Maurice. — Nivelles.

LAGASSE (Charles), ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, 61, rue du Conseil. — Bruxelles.

LAGASSE (Jules), notaire, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

LAHOUSSE (D^r^), professeur à l'Université, 2, rue des Dominicains. — Gand.

LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liège.

LAMBERT (Camille), ingénieur, 7, rue d'Archis. — Liège.

LAMBIOTTE (Victor), ingénieur. — Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).

LAMEY (R. P. Dom Mayeul), O. S. B., prieuré de Saint-Jean, Grignon par Les Laumes (Côte-d'Or — France).

LAMY (Mgr), président du collège Marie-Thérèse. — Louvain.

de Lapparent (A.), membre correspondant de la Société géologique de Londres, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.

Lavaud de Lestrade, prêtre de Saint-Sulpice, professeur de sciences au Séminaire. — Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme — France).

Lebon, docteur en médecine, place Saint-Paul. — Nivelles.

Ledresseur (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 75, voer des Capucins. — Louvain.

Leemans, docteur en médecine, 19, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Lefebvre, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (abbé Ferdinand), professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (abbé Maurice), 36, rue de Bériot. — Louvain.

Legrand-Benoit, 31, rue de Bruxelles. — Namur.

Le Grelle (Cte Ferdinand), 21, rue Van Brée. — Anvers.

Leirens-Éliaert, rue du Pont. — Alost.

Lejeune-Simonis, château de Sohan par Pepinster (Liège).

Lemoine (Georges), ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie pour la chimie à l'École polytechnique, 76, rue d'Assas. — Paris.

Lemonnier (abbé Th.), professeur au Petit-Séminaire de Mont-aux-Malades, par Rouen (Seine-Inférieure — France).

Le Paige (C.), professeur à l'Université, 21, rue des Anges. — Liège.

de Lichtervelde (Cte Gontran), conseiller de légation, 2, rue des Deux-Églises. — Bruxelles.

de Liedekerke (Cte Charles), 24, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

de Liedekerke de Pailhe (Cte Édouard), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

de Limburg-Stirum (Cte Samuel), 30, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

de Limburg-Stirum (Cte Thierry), sénateur, rue Hautport. — Gand.

de Limminghe (Cte), château de Gesves, par Assesse (Namur).

Limpens (Émile), avocat, place Impériale. — Alost.

de Lisleferme (E.-Henry), ingénieur de la marine en retraite. — Taillebourg (Charente-Inférieure — France).

Lucas, S. J. (R. P. Désiré), 11, rue des Récollets. — Louvain.

MABILLE (Léon), professeur à l'Université, 24, rue Marengo. — Louvain.

MAERTENS (chanoine), professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Nicolas.

MALCORPS (Ernest), avocat, 5, rue des Vaches. — Louvain.

MALISOUX (Émile), ingénieur principal de 1re classe des mines, 11, rempart ad aquam. — Namur.

MANSION (Paul), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

DE MARET (Adhémar). — Stavelot.

DE MARICOURT (Cte), à Villemétrie. — Senlis (Oise — France).

DE MARSILLY (Général), Grand-Hôtel de Paris, rue Bab-el-Oued. — Alger.

MARTENS (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

MARTINEZ Y SAEZ (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, plaza de Ministerios, 5, 3°, izq. — Madrid (Espagne).

MAS, S. J. (R. P. Bartolomé), colegio de S. Ignacio. — Manresa.

MASOIN (E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 15, Marché-aux-Poissons. — Louvain.

MATAGNE (Jules), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

DE MAUPEOU (Cte), ingénieur de la marine, 30, rue Vital. — Passy-Paris.

MAYER (Henri), avocat, 31, rue Saint-Jacques. — Tournay.

MEESSEN (Wilhelm), 28, place Jourdan. — Bruxelles.

DE MEEUS (Cte Henri), ingénieur, 72, rue du Vertbois. — Liège.

MEEUS-HONNOREZ (L.), distillateur. — Wyneghem par Anvers.

MELLO (Rev. J. Magens), Mapperly Vicarage, Derby (Grande-Bretagne).

DE MENDIZABAL TAMBORREL (Joaquin), ingeniero geógrafo, profesor de astronomía y geodesía en el Colegio militar, observatorio meteorologico central. — Mexico (Mexique).

MERCIER (Mgr D.), 84, rue de Namur. — Louvain.

MERTENS (Guill.), ingénieur, directeur de l'usine à gaz, 73, rue de Tourcoing. — Roubaix (Nord — France).

MERVEILLEUX DU VIGNAUX (Pierre), ingénieur des forges et chantiers de la Méditerranée, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

MICHA, professeur à l'Université, 8, place du Peuple. — Louvain.

MIOT (Léopold), docteur en médecine, de l'Académie royale de médecine, 15, rue de Beaumont. — Charleroi.

MIR, S. J. (R. P. Michel), membre de l'Académie royale d'Espagne, Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).

MIRANDA BISTUER (Julian), canónigo magistral de la catedral, canongia nueva, 18. — Segovia (Espagne).

MISONNE (Lucien), directeur-gérant des charbonnages du Hasard. — Tamines (Namur).

MISSON (B^on^), 16, quai de Maestricht. — Liège.

MOELLER, docteur en médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

MONCHAMP (abbé Georges), docteur en théologie et en philosophie, professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Trond.

MONSARRAT (G.), 14, rue des Capucines. — Paris.

DE MONTGRAND (Mis), propriétaire à Saint-Menet. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

DE MOREAU D'ANDOY (Ch^er^), 186, avenue Louise. — Bruxelles.

MORETUS (René), place de Meir. — Anvers.

MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 21, rue Duvivier. — Liège.

DE NADAILLAC (Mis), 18, rue Duphot. — Paris.

NAMÈCHE (Mgr), ancien recteur magnifique de l'Université.— Louvain.

NAVA DI BONTIFÈ (S. Exc. Mgr), archevêque d'Héraclée, nonce du S. Siége en Belgique. — Bruxelles.

NÈVE (Félix), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 52, rue des Orphelins. — Louvain.

NEWTON (Général John), 279, Adelphi Street. — Brooklyn, New-York.

NISOT (Victor), ingénieur, docteur en sciences physiques et mathématiques, 44, rue de la Loi. — Bruxelles.

NOLLÉE DE NODUWEZ, 116, rue Royale. — Bruxelles.

NYSSENS (Albert), professeur à l'Université. — Louvain.

NYSSENS (Julien), ingénieur des ponts et chaussées, 190, rue de la Loi. — Bruxelles.

NYSSENS (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 19, rue Sainte-Marguerite. — Gand.

D'OCAGNE (Maurice), ingénieur des ponts et chaussées. — Pontoise (Seine-et-Oise — France).

OTTO (Jean), 36, Marché-aux-Herbes. — Bruxelles.

OUVERLEAUX-LAGASSE (Félix), docteur en droit, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

PARDON (Gustave), ingénieur. — Frameries (Hainaut).

Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Patroni (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.

Pecher (Eugène), 64, avenue Louise. — Bruxelles.

Pepin, S. J. (R. P. Théophile), École libre Saint-Michel. — Saint-Étienne (Loire — France).

Peretti (abbé J.), curé de Sainte-Marie. — Calvi (Corse — France).

Perez (Miguel), director del Observatorio central, 1ª calle de la Merced, nº 27. — Mexico (Mexique).

Perez Moreno (Andrés), inspector general del cuerpo de ingenieros de minas de España, calle de Apodaca, nº 3, c^to pral izq. — Madrid (Espagne).

Petit (chanoine), rue de l'Arsenal. — Namur.

Pichault (Stéphane), ingénieur, directeur des ateliers de construction de la Société Franco-Belge. — Raisnes (Nord — France).

de Pillon de S. Philbert (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).

Pirard (chanoine), vicaire général, 6, boulevard Léopold. — Namur.

Piscé (chanoine), rue des Bateaux. — Malines.

Poisot (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

de Ponthière (Albert), propriétaire-agriculteur, château des Cortils, par Visé (Liège).

Powis de ten Bossche, membre de la Chambre des Représentants, 8, rue Belliard. — Bruxelles.

Proost (Alphonse), inspecteur général de l'agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 30, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 131, rue Royale extérieure. — Bruxelles.

Prudham (abbé), directeur du collège Stanislas, rue N.-D. des Champs. — Paris.

Puga (Guillermo B. y), ingeniero topógrafo, profesor de Geologia en la Escuela nacional de Agricultura, calle del Tompeate, 2. — Mexico (Mexique).

Quairier, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.

Quiepo (Antonio Garcia Vazquez), docteur en droit, plaza de Cervantes, nº 13. — Santiago (Galice — Espagne).

RACHON (abbé Prosper), curé de Ham et Saint-Jean, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

RACLOT (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

RAMIREZ (Santiago), ingeniero de minas, calle de Buenavista, 15 1/2 — Mexico (Mexique).

RAVAIN (abbé J.-R.), 14, rue Bernier. — Angers (Maine-et-Loire — France).

RECTEUR (R. P.), rue de Tongres, 2237. — Maestricht (Limbourg hollandais).

RECTOR (R. P.) del Colegio de San José. — Valladolid (Espagne).

RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (prov. de Tarragona — Espagne).

DE REGNON, S. J. (R. P. Théodore), 391, rue de Vaugirard. — Paris.

RENARD (abbé Alphonse), conservateur honoraire au Musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre-Orientale).

REYNAERT, docteur en médecine, rue du Progrès. — Saint-Nicolas.

DE RIBAUCOURT (Cte), sénateur, 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde.

RISUEÑO (Emiliano Rodriguez), catedratico de Historia natural en la Universidad, calle Duque de la Victoria, 16 pral. — Valladolid (Espagne).

DE LA ROCHE (Cher Camille), rue de Houdain. — Mons.

DE LA ROCHE DE MARCHIENNES (Émile), 8, rue du Parchemin. — Bruxelles.

RODILLON (abbé Pr.), professeur de philosophie au Petit-Séminaire de la Primatiale, 1, rue Tramassac. — Lyon (Rhône — France).

ROJAS, S. J. (R. P.), professeur d'histoire naturelle, Colegio. — Orduña (Vizcaya — Espagne).

DE ROUILLÉ (Cte), 44, avenue des Arts. — Bruxelles.

ROUSSEL (Lucien), professeur à l'École forestière, 11, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

DE RUBEMPRÉ (Pce), rue aux Laines. — Bruxelles; ou à Westerloo.

SAEY (Henri), notaire. — Renaix.

SAEY (abbé Pr.), curé à Woubrechtegem, par Herzele (Fland.-Orient.).

de Salvert (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 7, rue de la Bibliothèque. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

Sanchez, S.J. (R. P. Hilario), Colegio. — Carrion (Palencia — Espagne).

de Santa Cruz (Ivan Armada Hernandez de Cordova, Mis), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).

Sanz (Pelegrin), ingeniero civil. — Castellon de la Plana (Espagne).

Sanz y Lopez (Cesareo), profesor de matemáticas, calle del Colegio de Doncellas. — Toledo (Espagne).

Scarsez de Locqueneuille (Anatole), château de St-François. — Farciennes (Hainaut); ou 153, chaussée de Vleurgat. — Ixelles.

Schmitz, S. J. (R. P. Gaspar), au Collège Saint-Servais, 80, rue Saint-Gilles. — Liège.

Schobbens, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.

Schoemaker (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).

de Schoutheete de Tervarent (Cher). — Saint-Nicolas.

Simonis (Alfred), sénateur. — Verviers.

Simonis (Louis), industriel. — Verviers.

Siret (Henri), ingénieur, 11, rue Saint-Joseph. — Anvers.

Siret (Louis), ingénieur, Parazuelos Aguilas (prove Murcia — Espagne).

Smekens (Théophile), président du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (abbé Gérard), docteur en sciences naturelles, professeur de sciences au Collège St-Joseph. — Hasselt.

del Socorro (José Maria Solano, Mis), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo. — Madrid (Espagne).

Solvyns (Albert), 7, avenue de la Place-d'Armes. — Gand.

Soreil, ingénieur. — Maredret sous Sosoye, par Anthée (Namur).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).

Spina, S. J. (R. P. Pedro), Colegio de S. Juan Nepomuceno. — Saltillo (Coahuila — Mexique).

Springael (Auguste), ingénieur, 64, rue de Bordeaux. — Bruxelles.

Stainier (Xavier), 78, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Stillemans (S. G. Mgr), évêque de Gand.

STINGLHAMBER (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.

STOESSER (Alphonse), directeur-gérant de la Société anonyme du charbonnage de Sacré-Madame. — Dampremy (Hainaut).

STOFFAES (abbé), licencié ès sciences, 54, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

STORMS (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (Brabant).

STORMS (John), 37, rue des Champs-Élysées. — Bruxelles.

STORMS (Raymond), 13, rue du Président. — Bruxelles.

STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 18, rue de l'Hôtel-des-Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

SUCHETET (André), 10, rue Alain Blanchard. — Rouen (Seine-Inférieure — France).

SUTTOR (Eugène), ingénieur honoraire des ponts et chaussées, 19, rue des Bogards. — Louvain.

SWOLFS (chanoine), professeur au Petit-Séminaire. — Malines.

TAYMANS (Émile), notaire. — Genappe (Brabant).

TEIXEIRA (Gomes), professeur à l'École polytechnique. — Porto (Portugal).

TERCELIN (Félix), rue du Mont-de-Piété. — Mons.

THEUNIS (Auguste), répétiteur à l'Université, 83, rue de Tirlemont. — Louvain.

THIBAUDIER, ingénieur de la marine. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).

THIRION (Alphonse). — Sclayn par Namèche (Namur).

THIRION, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 24, rue de Fragnée. — Liège.

TORROJA Y CABALLÉ (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle de Lope de Vega, 61, pral. — Madrid (Espagne).

TRAS, S. J. (R. P.), professeur au collège de la Paix. — Namur.

DE TRAZEGNIES (M[is]). — Corroy-le-Château, par Gembloux.

DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

DE T'SERCLAES (C[te] Jacques), capitaine au 1[er] rég. d'artillerie, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

T'SERSTEVENS (Léon), 52, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.

TYKORT (Émile), ingénieur civil. — Perck, par Vilvorde.

D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant).

DU VAL DE BEAULIEU (Cte), 55, avenue des Arts. — Bruxelles.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Charles), de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

VAN AERTSELAER (chanoine), directeur de l'Institut St-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.

VAN BIERVLIET (Alb.), professeur à l'Université catholique, 25, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

VANDEN BERG (Charles), notaire, place Saint-Paul. — Liège.

VANDEN BOSSCHE (A.), ingénieur, rue des Orphelins. — Louvain.

VANDEN BRANDEN DE REETH (Mgr), Évêque d'Érythrée, au Collège Belge. — Rome.

VANDEN GHEYN (abbé Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin. — Gand.

VANDEN GHEYN, S. J. (R. P. Joseph), professeur à l'Institut catholique, 35, rue de Sèvres. — Paris.

VANDEN PEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liège.

VANDEN PEEREBOOM (Jules), ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Courtrai.

VANDER BRUGGEN (Bon Maurice), rue du Gouvernement. — Gand.

VANDER HAEGHEN (William), avocat, 44, rue Berckmans. — Bruxelles.

VANDER SMISSEN (Édouard), avocat, 16, rue du Gouvernement-Provisoire. — Bruxelles.

VANDER STRATEN-PONTHOZ (Cte François), 13, rue de la Loi. — Bruxelles.

VANDER VOORDT (Jules), ingénieur, 83, marché aux Chevaux. — Anvers.

VAN DE WOESTYNE (chan.), professeur au Grand-Séminaire. — Bruges.

VAN DORPE (Jules), docteur en médecine, 7, rue Seutin. — Bruxelles.

VAN DRÈCHE, docteur en médecine, rue de l'Ouvrage. — Namur.

VAN DROMME, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.

VAN ERMENGEM, docteur en médecine, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre orientale).

VAN GAMEREN (chanoine), rue du Bruul. — Malines.

VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 161, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.

VANNUTELLI (S. E. le cardinal Serafino). — Rome.

Van Ortroy (Fernand), lieutenant au 1er régiment de chasseurs à cheval, 14, rue Saint-Jean. — Tournay.

Van Overloop (Eugène), sénateur, 48, rue Royale. — Bruxelles.

Van Segvelt (Edmond), 112, boulevard des Arbalétriers. — Malines.

Van Tricht, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Van Zeebroeck (abbé), directeur à l'Établissement des Sœurs-Grises. — Diest.

Van Zuylen-Orban (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liège.

Vaultrin, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

Venneman, docteur en médecine, professeur à l'Université. — Louvain.

Vercruysse (Victor), 61, rue de France. — Courtrai.

Verhelst (abbé), professeur au collège Saint-Jean-Berckmans. — Anvers.

Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 25, rue des Écreniers. — Louvain.

Vicaire (Eugène), ingénieur en chef des mines, 30, rue Gay-Lussac. — Paris.

Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

Vilain XIIII (Vte), sénateur, 11, rue du Trône. — Bruxelles.

Villafuerte (Eliodoro), presbitero, 86, calle de las Delicias. — Santiago (Chili).

de Villers-Vergauwen, 12, marché au Lin. — Gand.

Villié, professeur aux Facultés catholiques, 78, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Viñes (R. P. Benito), director del Observatorio, colegio de Belen. — La Havane (Cuba).

Visart de Bocarmé (Cte Amédée), bourgmestre de Bruges.

de Vorges (E. Domet), 74, rue Miromesnil. — Paris.

Vuilsteke, professeur à l'Université, 24, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Walravens (abbé Adelson), directeur du collège d'Enghien.

Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de bataillon au 3e lanciers, 1, rue Longue. — Bruges.

Wasseige (Armand), banquier, 2bis, rue Godefroid. — Namur.

Wautelet (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

de Wavrin (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Flandre-Orientale).

de Weck (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (Canton de Fribourg — Suisse).

Wéry (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.

Wilmotte (abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe (Namur).

Witz (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 104, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Wolf, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.

de Wouters (chanoine). — Braine-le-Comte.

de Wouters (Cher Lambert), Rotselaer, par Wespelaer (Brabant).

Wouters (abbé Louis), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

Zech (Guillaume), négociant. — Braine-le-Comte.

Liste des membres décédés.

(Juin 1889-août 1890.)

Bernardin	Melle.
Antonio Casarès	Santiago.
Pce Gustave de Croy	Le Rœulx.
A. Dassonville-Lepée	Menin.
Tony De Bruyn	Bruxelles.
Ch. Delcour	Louvain.
Abbé Ducrost	Solutré.
Mme Dumont	Liège.
Auguste Devivier	Louvain.
Adrien Gravez	Mons.
Bon Michaux	Louvain.
Bon Moncheur	Bruxelles.
Cte de Namur d'Elzée	Dhuy.
R. P. Perry, S. J.	Stonyhurst.
Gérard Peyrot	Anvers.
Gaston Planté	Paris.
R. P. Rathouis, S. J.	Zi-ka-wey.
Cte Hermann van den Steen de Jehay	Bruxelles.
Abbé de Vocht	Zeelst.

Listes des membres inscrits dans les sections.

1re Section.

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.

MM. d'Abbadie.
Adan de Yarza.
R. P. Alcolado, S. J.
Chan. di Bartolo.
Baule.
Théodore Belpaire.
Pce Boncompagni.
Boussinesq.
du Boys.

MM. Breithof.
de Bussy.
Carnoy.
Abbé Clasen.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
R. P. Delsaulx, S. J.
De Tilly.
Dusausoy.

MM. Dutordoir.
Eynaud.
Gauthier-Villars.
Abbé Gelin.
Ph. Gilbert.
Goedseels.
Bon G. Greindl.
de Grossouvre.
Cte François de Grunne.
Guyétand.
Haton de la Goupillière.
Hermite.
Iñiguez.
Général Jacmart.
Jenner.
Jimeno.
Amiral de Jonquières.
Camille Jordan.
Lacor.
Charles Lagasse.
Lambert.
R. P. Dom Lamey.
Le Paige.
Cte Charles de Liedekerke.
de Lisleferme.
R. P. Lucas, S. J.
Mansion.
Général de Marsilly.
Cte de Maupeou.

MM. de Mendizabal.
Micha.
Général John Newton.
Nisot.
J. Nyssens.
P. Nysseus.
d'Ocagne.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
M. Perez.
Chanoine Piscé.
Vte de Salvert.
Sanz y Lopez.
P. Sanz.
Cte de Sparre.
Stoffaes.
Suttor.
Teixeira.
R. P. Thirion, S. J.
Timmermans.
Torroja.
Cte Jacques de T'Serclaes.
Cte Aymard d'Ursel.
E. Vandenpeereboom.
Abbé Vau Zeebroeck.
Vicaire.
Villafuerte.
Villié.
Witz.

2e Section.

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du Globe.

MM. Alfageme.
Béchamp.
Blondel.
Bonamis.

MM. Branly.
Bruylants.
Chautard.
R. P. De Greeff, S. J.

Abbé Delorge.
De Preter.
François Dewalque.
Dincq-Jordan.
André Dumont.
Feliù y Perez.
R. P. François, S. J.
R. P. George, S. J.
R. P. Granero, S. J.
Grisar.
Hector Henry.
Louis Henry.
Kennis.
Jules Lagasse
Lambiotte.
Lemoine.
Malisoux.
Mertens.
Misonne.
M[is] de Montgrand.
Mullenders.
Ouverleaux-Lagasse.
Pichault.
Abbé Pirard.
Abbé Raclot.
Abbé Ravain.
R. P. de Regnon, S. J.
Springael.
Theunis.
R. P. Tras, S. J.
Tykort.
Van Biervliet.
Vander Voordt.
R. P. Van Tricht, S. J.
R. P. Viñes, S. J.

3e Section.

Géologie, Minéralogie. — Botanique. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie, Science du langage. — Géographie.

Mgr Abbeloos
MM. d'Acy.
Fr. Alexis.
Arcelin.
Baguet.
Baillon.
Abbé Bardin
Ern. Bayet.
C[te] H. de Beauffort.
M[is] de la Boëssière-Thiennes.
Abbé Boulay.
Abbé Bourgeat.
MM. Anatole Buisseret.
Joseph Buisseret.
Firmin Casarès.
Abbé De Brouwer.
R. P. Delattre, S. J.
Chanoine Delvigne.
Abbé Descamps.
Abbé Detierre.
Gustave Dewalque.
Dollo.
Dugniolle.

MM. Albert Fauvel.
R. P. Fita, S. J.
Floren.
Foerster.
Fontaine.
Abbé de Foville.
R. P. Gerste, S. J.
Grinda.
Chan. Hamard.
Cte de Hemptinne.
Cte d'Hemricourt de Grunne.
Abbé Hervier.
R. P. Kirsch.
de Kirwan.
Kürth.
A. de Lapparent.
Abbé Ferdinand Lefebvre.
Cte G. de Lichtervelde.
Cte Adolphe de Limburg Stirum.
Édouard Martens.
Martinez y Saez.
Magens Mello.
R. P. Mir, S. J.
Abbé Monchamp.
Mis de Nadaillac.
Perez Moreno.
Puga.
Abbé Rachon.

MM. Abbé Renard.
Ramirez.
Risueño.
Ém. de la Roche.
R. P. Rojas, S. J.
R. P. Schmitz, S. J.
H. Siret.
L. Siret.
Abbé Smets.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
Stainier.
John Storms.
R. Storms.
Chanoine Swolfs.
Charles de la Vallée Poussin.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Abbé G. Van den Gheyn.
Van Drèche.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Van Segvelt.
Abbé Verhelst.
R. P. Vicent, S. J.
de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

4e Section.

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Barcia Caballero.
Borginon.
Bourdeau.
Bribosia.

MM. Charlier.
P. J. E. Cranincx.
Cuylits.
Debaisieux.

MM. Desplats.
A. Dumont.
Faucon.
Feijeiro.
Francotte.
Gallez.
Goix.
Goris.
Haan.
R. P. Hahn, S. J.
Heymans.
Houze.
Janssens.
Alexandre Lagasse.
Lahousse.
Lebon.
Ledresseur.

MM. Leemans.
Dr Lefebvre.
Masoin.
Matagne.
Miot.
Mœller.
Proost.
Reynaert.
Schobbens.
Struelens.
Van Dorpe.
Van Ermengem.
Van Keerberghen.
Venneman.
Verriest.
Warlomont.

5e Section.

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales. Économie industrielle.

MM. Berleur.
de Borman.
Jules Cartuyvels.
P^ce^ Juste de Croy.
Davignon.
De Baets.
Camille De Jaer.
De Lantsheere.
Dohet.
de Gerlache.
Grandmont.
Grenier.
Bon de Haulleville.

MM. Cte de Hemptinne.
Houtart.
Claudio Jannet.
Legrand-Benoît.
Cte Ferdinand Le Grelle.
Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Mayer.
Ch^er^ de Moreau d'Andoy.
Otto.
Pecher.
de Ponthière.
P^ce^ de Rubempré.

MM. Henri Saey.
Smekens.
Stinglhamber.
t'Serstevens.
Vander Smissen.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.

MM. van Zuylen-Orban.
Vte Vilain XIIII.
Cte Amédée Visart.
Abbé Walravens.
Wasseige.
Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL.

1888 - 1889.

Président, M. Georges Lemoine.
1er *Vice-Président*, M. Louis Cousin.
2e *Vice-Président*, M. Charles Lagasse.
Secrétaire, R. P. Carbonnelle.
Trésorier, M. Jules De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
L. Delgeur.
Chanoine Delvigne.
Fr. Dewalque.
G. Dewalque.
André Dumont.
Ph. Gilbert.
E. Goedseels.
L. Henry.
Général Jacmart.
Dr Lefebvre.
P. Mansion.
A. Proost.
Léon t'Serstevens.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.

MEMBRES DU CONSEIL.

1889 - 1890.

Président, M. Paul Mansion.
1er *Vice-Président*, M. A. Witz.
2e *Vice-Président*, M. le Chanoine Delvigne.
Secrétaire provisoire, R. P. George.
Trésorier, M. Jules De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
L. Cousin.
Fr. Dewalque.
G. Dewalque.
André Dumont.
Ph. Gilbert.
Ed. Goedseels.
L. Henry.
Général Jacmart.
Ch. Lagasse.
Dr Lefebvre.
Dr Moeller.
A. Proost.
L. t'Serstevens.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.

BUREAUX DES SECTIONS.

1888-1889.

1re Section.

Président, M. l'abbé E. Gelin.
Vice-Présidents, MM. de Jonquières et E. Suttor.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, M. Fr. Dewalque.
Vice-Présidents, MM. L. Thibaut et R. P. George.
Secrétaire, M. A. Van Biervliet.

3e Section.

Président, M. Ch. de Kirwan.
Vice-Présidents, MM. H. Siret et L. Delgeur.
Secrétaire, M. A. Buisseret.

4e Section.

Président, M. Venneman.
Vice-Présidents, MM. Cuylits et Moeller.
Secrétaire, M. A. Dumont.

5e Section.

Président, M. Paul de Gerlache.
Vice-Présidents, MM. De Marbaix et Ch. Thiébauld.
Secrétaire, M. L. De Lantsheere.

BUREAUX DES SECTIONS.

1889 - 1890.

—

1re Section.

Président, M. Ch. Lagasse.
Vice-Présidents, MM. le Vte de Salvert et J. Carnoy.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, M. Lemoine.
Vice-Présidents, MM. Witz et Fr. Dewalque.
Secrétaire, M. A. Van Biervliet.

3e Section.

Président, M. Dollo.
Vice-Présidents, M. le chanoine Swolfs et le R. P. Vanden Gheyn.
Secrétaire, M. Anatole Buisseret.

4e Section.

Président, M. Venneman.
Vice-Présidents, MM. Cuylits et Moeller.
Secrétaire, M. A. Dumont.

5e Section.

Président, M. Paul de Gerlache.
Vice-Présidents, MM. De Marbaix et Ch. Thiébauld.
Secrétaire, M. L. De Lantsheere.

SESSIONS DE 1888-1889

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

La Société a tenu trois sessions pendant cette treizième année :

La première, le jeudi 25 octobre 1888 ;

La seconde, le jeudi 31 janvier 1889 ;

Et la troisième, le jeudi 2, le vendredi 3 et le samedi 4 mai 1889.

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

Jeudi, 25 octobre 1888. — M. Goedseels analyse un travail manuscrit, relatif à la Géométrie analytique, de M. Ed. Torroja, professeur à l'Université de Madrid, et propose à la section de voter des remerciements à l'auteur, ce qui est approuvé.

M. Mansion présente ensuite la note suivante sur le théorème de Rolle :

Sur l'extension du théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations algébriques.

« Soit

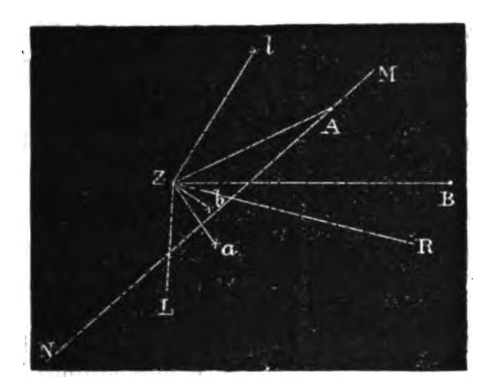
$$fz = (z - \alpha)(z - \beta) \cdots (z - \lambda) = 0,$$

une équation algébrique de degré n, ayant pour racines égales, ou inégales, les n quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, réelles ou imaginaires. On a, comme l'on sait,

$$f'z = fz \left[\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z - \beta} + \cdots + \frac{1}{z - \lambda} \right].$$

Représentons, sur un plan, les racines de $fz = 0$, par les n points A, B, ..., L, ayant pour affixes $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et traçons une

droite MN telle que les points A, B, ..., L soient tous d'un même côté de cette droite, ou sur cette droite même. De l'autre



côté de la droite, prenons un point arbitraire quelconque Z.

Les quantités $z-\alpha$, $z-\beta$, ..., $z-\lambda$ seront représentées géométriquement, comme l'on sait, par les droites

$$AZ,\quad BZ,\ \ldots,\ LZ,$$

et les quantités inverses

$$\frac{1}{z-\alpha},\quad \frac{1}{z-\beta},\ \ldots,\ \frac{1}{z-\lambda},$$

par les droites

$$aZ,\quad bZ,\ \ldots,\ lZ,$$

dont les longueurs sont les inverses de celles de AZ, BZ, ..., LZ et qui, en direction, sont les symétriques de AZ, BZ, ..., LZ, par rapport à ZR, droite menée par Z, parallèlement à l'axe des affixes réelles.

Le point Z étant situé du côté de la droite MN où ne se trouvent aucun des points A, B, ..., L, les angles que font entre elles les droites AZ, BZ, ..., LZ sont inférieurs à deux droits; il en est donc de même des angles des droites symétriques aZ, bZ, ..., lZ. Par suite, la résultante géométrique de celles-ci ne peut être nulle, et il en est de même de la somme

$$\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}+\cdots+\frac{1}{z-\lambda},$$

pour toute valeur de z correspondant à un point situé à gauche de la droite MN. Comme fz n'est pas nul non plus, dans cette

région du plan, les deux facteurs de l'expression égale à $f'z$ ne peuvent donc s'annuler dans cette région.

D'où ce premier théorème : *Si l'on divise, par une droite, le plan en deux régions dont l'une contient tous les points-racines d'une équation algébrique, cette même région contient aussi tous les points-racines de l'équation dérivée.*

La démonstration précédente s'applique évidemment à une équation transcendante $Fz = 0$, ayant une infinité de racines $z_1, z_2, z_3, \ldots$, pourvu que l'on ait

$$\frac{F'z}{Fz} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} + \text{etc.}$$

On déduit aisément du théorème précédent un autre théorème, que l'on peut regarder comme la généralisation de celui de Rolle : *Un contour convexe qui contient les points-racines d'une équation algébrique contient aussi les points-racines de l'équation dérivée.* Pour démontrer ce théorème, il suffit de prendre, dans le premier, pour droite MN, successivement toutes les droites tangentes au contour considéré.

Si l'on prend pour contour un cercle ayant l'origine des affixes pour centre, on arrive au corollaire suivant : *La limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique est aussi une limite supérieure du module des racines de l'équation dérivée.*

REMARQUE. La proposition principale établie dans cette note a été démontrée plusieurs fois depuis une quinzaine d'années (*). La démonstration que nous venons d'exposer ne diffère pas au

(*) Voir F. LUCAS, *Sur une application de la mécanique rationnelle à la théorie des équations* (COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, 1879, t. LXXXIX, pp. 224-229); BERLOTY, *Sur les équations algébriques* (IB., 1884, t. XCIX, pp. 745-747); puis, divers travaux de géomètres hollandais : LEGEBEKE (1881, *Archives néerlandaises*, t. XVI, pp. 273-278; 1882, *Nieuw Archiev voor Wiskunde*, t. VIII, pp. 75-80), VANDENBERG (1882, *Nieuw Archiev*, t. IX, pp. 1-14 et 60; 1884, t. XI, 153-186 ; 1888, t. XV, pp. 100-164), STIELTJES (1883, *Arch. néerl.*, t. XVIII, pp. 1-28), DE BOER (1884, *Bulletin de l'Académie d'Amsterdam*, t. XIX, pp. 384-416; t. XX, pp. 413-452, et *Arch. néerlandaises*, t. XIX, pp. 217-240), que nous n'avons pu tous consulter et où l'on étudie minutieusement les conséquences du théorème fondamental. M. Vandenberg (N. A., t. IX, p. 60) cite en outre les *Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes* de F. LUCAS (Paris, 1864), d'autres articles de celui-ci en 1874 (C. R., t. LXXVIII, pp. 140-144, 180-183, 271-274, 431-433), une note de LAGUERRE (IB., pp. 278-280) et même une annotation manuscrite trouvée dans les papiers de Gauss (*Werke*, t. III, p. 112).

fond de celle de M. F. Lucas, basée sur la statique. Mais il nous a paru intéressant de montrer, une fois de plus, l'utilité de la représentation géométrique des imaginaires, sans faire intervenir, même en apparence, la notion de force. »

M. Mansion entretient ensuite la section d'une formule de M. Darboux, dont il expose une démonstration déduite du théorème de Taylor (Voir *Seconde partie*, pp. 108-115). A cette occasion M. Gilbert fait observer que l'on exagère souvent l'infériorité des formes classiques du reste de la série de Taylor.

M. Pasquier revient sur une communication faite à la séance précédente par le R. P. Carbonnelle, au sujet d'une conséquence du théorème de Fermat.

Jeudi, 31 janvier 1889. — M. Gilbert fait rapport sur une note de M. Baule, qui fait suite au travail du même auteur sur le gyroscope collimateur et est relative au mouvement de la toupie. Soumettant au contrôle de l'expérience les formules relatives à ce mouvement, M. Baule a remarqué que, pour un même sens de rotation de la toupie, il y a certaines différences de hauteur, toujours de même sens aussi, entre les horizons observés et calculés. Il a été ainsi amené à une théorie simple, donnant notamment l'inclinaison de la toupie soumise à la rotation de la terre, et dont les formules concordent parfaitement avec l'expérience. — Sur la proposition de M. Gilbert, la section vote l'impression de la note de M. Baule dans les *Annales* (Cette note a été publiée à la suite du mémoire de M. Baule, dans le tome XII, 2e partie, pp. 177-184).

M. Goedseels fait une rectification relative à une précédente communication au sujet de l'exactitude des tracés graphiques.

M. Gilbert entretient la section *de quelques formules d'analyse d'un usage général dans la physique mathématique.*

M. Gilbert signale ensuite une erreur d'appréciation assez répandue au sujet de la démonstration de la série de Fourier,

qui repose sur la théorie des fonctions d'une variable imaginaire : cette démonstration n'est pas rigoureuse pour les cas limites, qui sont les plus importants, ou, si on la rend rigoureuse, elle cesse d'être simple.

M. Mansion fait les deux remarques suivantes sur les fonctions elliptiques :

« 1. *Sur la fonction* p(u). Cherchons la fraction rationnelle la plus simple,

$$a+\frac{b}{c+\operatorname{sn}^2(u,k)},$$

de $\operatorname{sn}^2(u, k)$, qui, par le changement de u en Ui, garde, au signe près, la même forme et devienne, par conséquent,

$$-a'-\frac{b'}{c'+\operatorname{sn}^2(U,k')},$$

a', b', c' étant les mêmes fonctions du module k' que a, b, c le sont du module primitif k. Pour abréger, écrivons $\operatorname{sn} u$ pour $\operatorname{sn}(u, k)$, et $\operatorname{sn} U$ pour $\operatorname{sn}(U, k')$.

A cause de la relation connue $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} Ui = (i \operatorname{sn} U : \operatorname{cn} U)$, on a, après quelques transformations,

$$a+\frac{b}{c+\operatorname{sn}^2 u}=a+\frac{b}{1+c}-\frac{b}{(1+c)^2}\,\frac{1}{\operatorname{sn}^2 U-\dfrac{c}{c+1}}.$$

En identifiant cette expression avec

$$-a'-\frac{b'}{c'+\operatorname{sn}^2 U},$$

on trouve

$$a+\frac{b}{1+c}=-a',\quad \frac{b}{(1+c)^2}=b',\quad \frac{c}{1+c}=-c'.$$

La dernière relation peut prendre la forme plus symétrique $(1+c)(1+c')=1$, à laquelle on satisfait le plus simplement en supposant $c=c'=0$, ce qui entraîne $b=b'$, et

$$a+\frac{b}{\operatorname{sn}^2 u}=-a'-\frac{b}{\operatorname{sn}^2 U}.$$

Dans cette relation, évidemment, on peut supposer $b = 1$. On trouve alors $a + a' + 1 = 0$.

Soit $a = f(k^2)$ et, par suite, $a' = f(k'^2) = f(1 - k^2)$, et

$$f(k^2) + f(1 - k^2) + 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

En dérivant cette relation fonctionnelle par rapport à k^2, on trouve

$$f'(k^2) - f'(1 - k^2) = 0.$$

Cette équation a pour solution la plus simple $f'(k^2) = \mathrm{A}$, ce qui donne $f(k^2) = \mathrm{A}k^2 + \mathrm{B}$, A et B étant des constantes. Substituant cette valeur dans la relation (1), elle devient

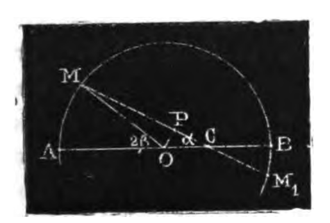
$$\mathrm{A}k^2 + \mathrm{B} + \mathrm{A}(1 - k^2) + \mathrm{B} + 1 = 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} + 2\mathrm{B} + 1 = 0.$$

Si l'on fait $\mathrm{A} = \mathrm{B} = -\frac{1}{3}$, on trouve, pour la fraction rationnelle cherchée,

$$-\frac{1 + k^2}{3} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

c'est-à-dire, au multiplicateur près, la fonction $p(u)$ de Weierstrass. Cette fonction est donc celle qui, soumise à la transformation imaginaire d'Abel et de Jacobi (changement de u en $\mathrm{U}i$), conduit à la formule la plus simple : $p(\mathrm{U}i) = -p(\mathrm{U})$.

2. *Sur une interprétation géométrique de la première intégrale elliptique.* Considérons une circonférence AMBM_1 de rayon $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$, et sur le diamètre AB un point C à une distance $\mathrm{OC} = c$ du centre. Abaissons du centre O une perpendiculaire OP sur CM. Si l'on appelle 2β et α les angles AOM, ACM, on a $\mathrm{OMC} = 2\beta - \alpha$ et, par suite,



$$\mathrm{OP} = \sin(2\beta - \alpha) = c \sin \alpha.$$

On déduit aisément de là, comme on sait, par l'analyse ou par la géométrie (Jacobi, *G. Werke*, II, p. 118),

$$\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}=\frac{1+c}{2}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}},\quad k=\frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

Posons

$$\rho^2=\frac{1+c}{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}}=\frac{AC}{PM}=\frac{2AC}{MM_1},$$

M_1 étant le point où MC rencontre la circonférence une seconde fois. Il viendra

$$u=\int_0^\alpha \tfrac{1}{2}\rho^2 d\alpha=F(k,\beta),$$

en appelant u l'aire de la courbe qui a ρ pour rayon vecteur. Le lieu des extrémités des rayons vecteurs ρ est donc une courbe dont l'aire peut servir à représenter la première intégrale elliptique et à définir sn u, cn u, dn u. On voit que cette interprétation géométrique de $F(k, \varphi)$, donnée par Halphen au début de son *Traité des fonctions elliptiques*, est contenue dans la remarque de Jacobi citée plus haut. »

M. Mansion expose un moyen élémentaire pour établir la formule qui donne la longueur d'une courbe gauche.

M. Gilbert signale les avantages que peut offrir l'introduction, dans la théorie de la courbure des surfaces, des cosinus directeurs de la normale. La courbure moyenne s'exprime fort simplement, et l'on en déduit, pour l'intégrale de cette courbure étendue à une portion de la surface, une expression remarquable, qui renferme diverses formules utiles dans la capillarité. L'équation des surfaces d'aire minimum sous la forme donnée par Riemann, le théorème de M. Bertrand sur les normales voisines d'une normale donnée, l'équation des lignes de courbure sous une forme très simple, etc., sont aussi des conséquences de cette théorie, que M. Gilbert se propose d'exposer plus complètement lorsqu'il aura fait les recherches bibliographiques nécessaires.

M. Goedseels communique le résultat de ses recherches sur la détermination des équations des lignes et des surfaces osculatrices.

Jeudi, 2 mai 1889. — M. Mansion lit un fragment d'une lettre de M. de Salvert, relatif au très regretté P. Carbonnelle, où le savant professeur de Lille apprécie avec une grande hauteur de vues l'homme supérieur que la Société scientifique de Bruxelles vient de perdre, et où il s'associe aux regrets unanimes que cette perte a provoqués.

M. Goedseels signale comme il suit l'existence d'une lacune existant, selon lui, dans l'enseignement des sciences mathématiques : « Les auteurs précisent avec le plus grand soin ce qu'il » faut entendre par la limite d'une quantité variable : il n'en est » pas de même des limites de lignes et de surfaces variables » dont il est fréquemment question dans les études géomé- » triques. Lorsqu'on veut préciser la signification de ces expres- » sions, on se heurte à des difficultés inattendues. M. Chomé, » dans son cours de géométrie descriptive à l'École militaire — » cours non encore publié — a levé ces difficultés de la manière » la plus heureuse : ses définitions jettent une clarté nouvelle » sur les questions de ce genre, et son exposition des théories » dont ces définitions sont la base échappe, à mon avis, à » toute critique ».

M. Goedseels fait connaître une méthode générale pour la recherche des équations des figures osculatrices. M. Mansion fait observer que les résultats de M. Goedseels peuvent probablement s'obtenir d'une manière tout aussi simple par l'application directe du théorème de Rolle.

M. Gilbert présente un mémoire *sur les accélérations*. L'impression de ce mémoire aux *Annales* est votée par la section (Voir 2e partie, pp. 261-315.)

M. Mansion fait rapport sur un mémoire de M. de Salvert relatif aux surfaces isothermes et propose de soumettre à l'ap-

préciation de M. Gilbert la partie de ce Mémoire qui est relative aux équations du mouvement de la chaleur : cette proposition est adoptée par la section.

Voici ce rapport, avec les modifications que M. Mansion y a introduites à la prière de M. Gilbert. Le Mémoire de M. de Salvert (Ch. I et II) est imprimé dans la seconde partie, pp. 117-260.

Rapport de M. P. Mansion

Sur les deux premiers Chapitres du Mémoire intitulé : *Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme*, par M. le Vte DE SALVERT, Professeur à la Faculté catholique des Sciences de Lille (*).

La partie du Mémoire de M. de Salvert dont j'ai à vous rendre compte aujourd'hui comprend deux Chapitres.

La première partie du premier Chapitre traite de la propriété caractéristique des invariants différentiels

$$\Delta_1\omega = \sqrt{\left(\frac{d\omega^2}{dx^2} + \frac{d\omega^2}{dy^2} + \frac{d\omega^2}{dz^2}\right)}, \quad \Delta_2\omega = \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{d^2\omega}{dz^2},$$

exprimés en coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ. L'auteur démontre, d'une manière élégante et rapide, les formules connues :

$$(\Delta_1\omega)^2 = (\Delta_1\varphi)^2 \frac{d\omega^2}{d\varphi^2} + (\Delta_1\psi)^2 \frac{d\omega^2}{d\psi^2} + (\Delta_1\varpi) \frac{d\omega^2}{d\varpi^2},$$

$$\Delta_2\omega = \Delta_2\varphi \frac{d\omega}{d\varphi} + \Delta_2\psi \frac{d\omega}{d\psi} + \Delta_2\varpi \frac{d\omega}{d\varpi} + (\Delta_1\varphi)^2 \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + (\Delta_1\psi)^2 \frac{d^2\omega}{d\psi^2} + (\Delta_1\varpi)^2 \frac{d^2\omega}{d\varpi^2}$$

$$= \Delta_1\varphi\, \Delta_1\psi\, \Delta_1\varpi \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\, \Delta_1\varpi} \frac{d\omega}{d\varphi}\right) + \text{etc.}\right],$$

(*) Ces deux premiers Chapitres ont été présentés à la première section, à la session de Pâques 1888, sous le titre : *Mémoire sur les équations du mouvement de la chaleur et la recherche des surfaces isothermes* (manuscrit d'environ 200 pages); le troisième Chapitre a été présenté à la session d'octobre 1888; il contient la solution détaillée de la question de la recherche des systèmes orthogonaux triplement isothermes, dans tous les cas particuliers qui admettent des surfaces développables dans la composition du système (90 pages); le quatrième Chapitre (66 pages) et l'introduction bibliographique, à la session de Pâques 1889; le cinquième, à la session d'octobre de 1889. Ces deux derniers Chapitres contiennent la solution de la question dans le cas le plus général.

sur lesquelles sont basées les équations générales du problème établies dans un chapitre subséquent.

Dans la seconde partie du premier Chapitre, M. de Salvert établit les équations du mouvement de la chaleur, d'abord en coordonnées rectilignes, puis en coordonnées curvilignes, soit par transformation de coordonnées, soit directement. Cette seconde démonstration en coordonnées curvilignes est présentée avec une grande clarté, et offre un bon exemple de l'emploi direct de ces coordonnées. L'auteur critique avec raison, comme plusieurs de ses devanciers, au point de vue de la rigueur, les raisonnements qui ont servi à Fourier et à Lamé pour établir ces équations. Ces raisonnements, imités de celui d'Euler pour obtenir l'équation, dite de continuité, en Hydrodynamique, sont remplacés par la considération de volumes finis, reposant sur le lemme suivant : Si, pour tout volume pris à l'intérieur d'une certaine enceinte, l'intégrale triple $\int F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ est nulle, la fonction F est nulle pour les points de cette enceinte (*). Pour terminer, l'auteur établit l'équation aux limites.

Le second Chapitre est beaucoup plus étendu que le premier et est consacré principalement à la recherche des familles isothermes de surfaces du premier et du second ordre. L'auteur donne d'abord leur équation aux dérivées partielles, soit sous la forme $\Delta_2\theta = 0$, θ étant le paramètre dit *thermométrique*, soit sous la forme, en apparence plus générale, $\Delta_2\lambda + (\Delta_1\lambda)^2 f\lambda = 0$, λ étant un paramètre *géométrique* lié au paramètre thermométrique par une relation de la forme $\lambda = F\theta$. Il fait ensuite observer que la connaissance de l'intégrale générale de l'une ou l'autre de ces équations ne permet pas de voir si telle ou telle famille de surfaces déterminée est une famille isotherme. En effet, pour identifier l'intégrale générale, qui contient des fonctions arbitraires, avec une surface d'espèce donnée, il faut particulariser

(*) Dans cette question, ou dans des questions analogues, MM. H. Laurent, Kirchoff, C. Neumann, Auerbach ont employé un mode de démonstration semblable à celui qui est exposé ici par l'auteur. Quant à la transformation de l'intégrale triple ainsi envisagée par un procédé qui n'est au fond qu'un cas très particulier de la formule de Green, M. de Salvert y a eu recours lui-même dès 1865 (*C. R. de l'Ac. des sciences de Paris*, 29 mai 1865), et en 1874 dans son *Étude sur le mouvement permanent des fluides* (Paris, Gauthier-Villars), pp. 16-20, et il ne le donne pas comme nouveau.



ces fonctions arbitraires, et il n'existe aucun procédé certain conduisant, dans tous les cas, à la réalisation de l'identification cherchée. En outre, *à priori*, on ne sait pas s'il existe ou non des familles isothermes correspondant à une solution singulière de l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$. Or l'Analyse, dans son état actuel, n'a pas de méthode générale de recherche des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du second ordre. M. de Salvert appuie ces remarques générales de l'examen d'un cas particulier : il cherche directement, en vue d'en faire usage pour une question ultérieure, l'intégrale générale en coordonnées rectilignes de l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques isothermes. Cette équation est (comme pour les surfaces cylindriques) de la forme

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{d^2u}{dw^2} = 0,$$

et il *semble* impossible, au premier abord, de déduire de l'intégrale générale une solution particulière évidente de cette dernière équation.

Puisque l'intégrale générale de l'équation $\Delta_2\theta = 0$, ou $\Delta_2\lambda + (\Delta_1\lambda)^2 f\lambda = 0$, ne peut servir à voir à coup sûr si une famille de surfaces $L(x, y, z, \lambda) = 0$ est isotherme, il y a lieu de chercher une solution directe de cette question. Voici, en substance, celle que M. de Salvert a imaginée, dans ce but, pour les surfaces algébriques. Il déduit de la relation $L = 0$,

$$\frac{\delta L}{\delta x} + \frac{\delta L}{\delta \lambda}\frac{d\lambda}{dx} = 0, \quad \frac{\delta^2 L}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 L}{\delta\lambda\delta x}\frac{d\lambda}{dx} + \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dx^2} + \frac{\delta L}{\delta\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2} = 0,$$

et deux couples de relations analogues en y et z. En ajoutant les trois secondes équations de chaque groupe, après en avoir éliminé $\frac{d\lambda}{dx}, \frac{d\lambda}{dy}, \frac{d\lambda}{dz}$ au moyen des premières, et tenant compte de la relation $\Delta_2\lambda + (\Delta_1\lambda)^2 f\lambda = 0$, il obtient la relation fondamentale

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\delta L}{\delta\lambda}\right)^2\left[\frac{\delta^2 L}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 L}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 L}{\delta z^2}\right] - 2\frac{\delta L}{\delta\lambda}\left[\frac{\delta L}{\delta x}\frac{\delta^2 L}{\delta x\delta\lambda} + \frac{\delta L}{\delta y}\frac{\delta^2 L}{\delta y\delta\lambda} + \frac{\delta L}{\delta z}\frac{\delta^2 L}{\delta z\delta\lambda}\right] \\ &\quad + \left[\frac{\delta^2 L}{\delta\lambda^2} - f\lambda\left(\frac{\delta L}{\delta\lambda}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)^2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \text{(S)}$$

Si $L = 0$ est de degré m et a n coefficients, l'équation (S) sera de degré $3m - 2$ et en aura un nombre N, toujours supérieur à $2n$, si m surpasse l'unité. L'équation (S), si $L = 0$ représente une famille isotherme, devra être vérifiée quels que soient x, y, z. Elle se dissociera donc en N équations différentielles du second ordre en λ, entre les n coefficients de l'équation $L = 0$; ces équations sont linéaires par rapport aux dérivées secondes, et comme leur nombre est supérieur au double du nombre des inconnues, on peut espérer qu'en général elles se réduiront à un nombre de $N - n$ équations du premier ordre, formant un système *surabondant.* Par suite, sauf le cas que nous allons dire où ces N équations ne seraient pas toutes indépendantes, leur système intégral général contiendra au plus n constantes arbitraires, résultat extrêmement important, comme on le verra plus bas; dans le cas exceptionnel mentionné tout à l'heure au contraire, où l'élimination des dérivées secondes ne fournirait ainsi qu'un nombre $n - k$ d'équations distinctes du premier ordre, les inconnues se trouveront déterminées par un système qui, ramené à la forme dite *normale,* serait d'ordre $n + k$, et conséquemment il ne pourra entrer au plus dans leur expression la plus générale que ce même nombre $n + k$ de constantes arbitraires. — D'ailleurs, dans tous les cas, comme la question ne dépend plus que d'équations différentielles ordinaires, on ne risque plus de laisser échapper les solutions singulières comme dans le cas où la question était traitée au moyen des équations aux dérivées partielles.

Le reste du Chapitre contient la recherche des familles isothermes de plans, de sphères, de surfaces du second ordre, et enfin la démonstration de ce théorème: *Il n'existe pas de famille isotherme de la forme* $Ax^m + By^m + Cz^m =$ *const., si* m *est entier et supérieur à* 2. Chacun de ces différents sujets est traité à fond et minutieusement, et pour chacun d'eux le résultat confirme exactement les prévisions déduites *à priori* de la théorie générale que nous venons de résumer. Il convient de dire un mot en particulier des surfaces isothermes du second ordre. M. de Salvert démontre deux fois qu'il n'y en a pas d'autres que celles

qu'avait indiquées Lamé. Dans l'Appendice, il le prouve directement, en considérant les *trente-cinq* équations différentielles dans lesquelles se décompose (S) quand on considère une surface générale du second degré. Au moyen de notations condensées, il parvient à mener à bonne fin les calculs en apparence effrayants auxquels conduit son ingénieuse méthode, et à retrouver les résultats obtenus plus simplement dans le texte même du Mémoire. Là, il cherche et trouve les surfaces isothermes de la forme $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H$, en appliquant la méthode basée sur la relation (S), puis il en déduit les paraboloïdes isothermes par déformation des surfaces primitivement trouvées. Effectuant ensuite un changement de coordonnées rectilignes, il montre que les surfaces isothermes obtenues antérieurement contiennent alors $n = 10$ constantes arbitraires, et, par suite, qu'elles sont les plus générales de l'espèce proposée. Comme conclusion, il énonce, en les complétant selon qu'il vient d'être dit, les théorèmes de Lamé relatifs aux propriétés des quadriques isothermes.

Comme on le voit par cette analyse de ces deux Chapitres, ils contiennent deux résultats principaux sur lesquels il convient d'appeler l'attention. En premier lieu, une méthode ingénieuse pour trouver les solutions algébriques, de forme déterminée, d'une équation aux dérivées partielles en n'intégrant que des équations différentielles ordinaires. En second lieu, la preuve rigoureuse de la non-existence de surfaces isothermes du second ordre autres que celles découvertes par Lamé.

Le Mémoire est d'ailleurs écrit d'un bout à l'autre avec une clarté remarquable; partout où nous avons soumis les calculs de l'Auteur à une vérification détaillée, nous les avons trouvés minutieusement exacts et conduits d'une manière élégante. Peut-être le désir de donner à son travail toute la perfection didactique qu'il comporte a-t-il parfois entraîné M. de Salvert dans des détails un peu longs, principalement dans les observations qui précèdent et qui suivent les calculs (*). Mais ce défaut s'excuse

---

(*) Nous plaçant à ce point de vue, nous avons transmis directement à M. de Salvert quelques petites critiques de détail, dont il a tenu compte lors de l'impression du Mémoire.

aisément, si l'on a égard au but d'enseignement oral réalisé par l'Auteur.

Nous proposons donc à la section de voter l'impression des Chapitres que nous venons d'analyser dans le tome XIII des *Annales* et d'adresser des remerciements à l'Auteur.

Vendredi, 3 mai 1889. — M. Goedseels continue sa communication de la veille sur les figures osculatrices.

M. Mansion communique la note suivante :

« *Sur l'emploi du signe* E *dans la théorie des fonctions.* Désignons, suivant l'usage, par $E(x)$, le nombre entier positif ou négatif immédiatement inférieur à x, ou égal à x, si x est entier, de manière que, par exemple, $E(5\frac{1}{4}) = 5$, $E(-5\frac{1}{4}) = -6$. Au moyen de ce signe E, on pourra représenter, sous une forme condensée, des fonctions jouissant de propriétés assez singulières. On peut aussi représenter ces fonctions, au moyen des séries et des intégrales de Fourier, mais d'une manière moins simple que par le secours de E.

L'expression $E(x)$ représente une fonction nulle de 0 à 1 exclusivement; égale à 1 de 1 à 2 exclusivement, et ainsi de suite. Si x est négatif, $E(x)$ égale -1 de -1 à 0 exclusivement, -2 de -2 à -1 exclusivement, etc. On peut observer que $E(x) + E(-x)$ est nul pour x entier, égal à -1 si x n'est pas entier.

La fonction $x - E(x)$ ne varie que de 0 à 1 exclusivement, quand x varie de N à N + 1 ; elle a 1 pour limite supérieure *inaccessible*.

L'expression $\varphi x = E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ est toujours nulle, sauf pour $x = 0$. La suivante

$$\psi x = E\frac{1}{1 + (Ex)^2},$$

est égale à l'unité de zéro à 1 *exclusivement*, nulle pour toutes les autres valeurs de x. La fonction plus compliquée

$$\chi x = \psi x + E\frac{1}{1 + (x-1)^2},$$

est égale à l'unité de zéro à 1 *inclusivement*, nulle pour les autres valeurs de x.

Au moyen de la fonction φx, il est facile de former des fonctions discontinues ayant une valeur nulle pour toute valeur de x, sauf un certain nombre de valeurs isolées. Ainsi

$$A\varphi(x-a)+B\varphi(x-b)+C\varphi(x-c),$$

est égale à A pour $x=a$, à B pour $x=b$, à C pour $x=c$, nulle pour toute autre valeur de x.

En recourant à χx ou à ψx, on obtient des fonctions nulles partout sauf, par exemple, de a à b, inclusivement ou exclusivement. Ainsi

$$\chi\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

est égal à l'unité depuis $x=a$, jusque $x=b$, nulle ailleurs. La fonction

$$f(x)\chi\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

est égale à fx de a à b, nulle ailleurs. La série

$$\frac{1}{3}\psi\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{4}\psi\left(\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{5}\psi\left(\frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\psi(2x-1)+\frac{1}{4}\psi(6x-2)+\frac{1}{5}\psi(12x-3)+\cdots$$

représente une fonction (intégrable de 0 à 1) qui est égale à 0 pour $x=1$, égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ à 1 exclusivement, à $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$, et ainsi de suite.

L'expression très compliquée

$$E\frac{E\sqrt{E(x^2)}}{E(x)+E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$$

est égale à

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x d\alpha}{\alpha},$$

c'est-à-dire qu'elle est nulle pour $x = 0$, égale à 1 pour x positif, à -1 pour x négatif.

La fonction

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + E\left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right)},$$

est nulle : 1° pour $x = 0$, $y = 0$; 2° pour $x = 0$, y quelconque ; 3° pour $y = 0$, x quelconque. Elle est égale au quotient $xy : (x^2 + y^2)$ pour x et y différents de zéro. Pour $x = 0, y = 0$, $F(x, y)$ est une fonction continue si x varie seul; elle est aussi continue si y varie seul ; mais elle est discontinue, si x et y varient simultanément. Car si, par exemple, $y = kx$, on trouve $F = \frac{1}{1+k^2}$, valeur qui n'a pas zéro pour limite, quand lim $x = 0$, k étant fixe. »

M. Gilbert observe que la notation *Lim* (= limite) peut servir à peu près aux mêmes usages que le symbole E.

Il fait part ensuite à la section de la suite de ses recherches sur les applications de la formule d'Ostrogradsky.

M. Mansion présente les considérations suivantes *sur la géométrie non euclidienne :*

« I. Parmi les géomètres qui au commencement de ce siècle ont bien reconnu les difficultés que présente un exposé scientifique de la géométrie élémentaire, on peut citer le grand AMPÈRE. On trouve, en effet, dans sa *Philosophie des sciences*, le curieux passage suivant :

« Reid a montré que si l'homme était réduit au simple sens de la vue, ne pouvant dès lors connaître que l'étendue superficielle à deux dimensions, et prenant pour des lignes droites ce qui serait réellement des arcs de grands cercles tracés sur une surface sphérique dont le centre serait dans son œil, les triangles qu'il considérerait comme rectilignes pourraient avoir deux angles ou même leurs trois angles droits ou obtus, et que la géométrie d'un tel homme serait toute différente de la nôtre,

deux de ces lignes qu'il prendrait pour droites se rencontrant, par exemple, toujours en deux points, en sorte que la notion de deux droites parallèles serait contradictoire pour lui ».

« Enfin, on sait que le théorème fondamental de la théorie des parallèles, lorsqu'on les considère comme existant réellement, dans l'espace à trois dimensions, ne peut être rigoureusement démontré. C'est que ce théorème est fondé sur des propriétés de l'espace qui supposent les trois dimensions et l'infinité de l'étendue (*) ».

II. Fourier, dès 1795, avait aussi signalé quelques-unes des difficultés de la géométrie ordinaire (**) et avait proposé de définir nettement la sphère, le plan et la droite, au moyen de l'idée de distance seule, considérée comme notion première irréductible : la sphère est le lieu des points équidistants d'un seul point, le plan est le lieu des points dont les distances à deux points fixes sont égales, la droite celui des points dont les distances à trois points fixes sont égales. Monge fit diverses objections aux vues de Fourier, mais sans se douter que ces définitions peuvent conduire indifféremment à la *géométrie euclidienne* ou aux deux sortes de *géométrie non euclidienne*.

M. De Tilly, dans son *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (1879), a montré, en effet, que l'on peut établir les principes de la *géométrie générale*, en partant de définitions analogues à celles de Fourier; il avait prouvé antérieurement (1873) l'impossibilité de démontrer le postulat de

---

(*) Ampère, *Essai sur la philosophie des sciences*. Première partie (Deuxième édition; Paris, Mallet-Bachelier, 1856), p. 64. Ampère ajoute : « Les vérités géométriques ont donc une réalité objective qui ne se trouve pas dans celles de l'arithmologie ». Deux pages plus haut, il dit encore : « Les vérités dont se composent l'arithmologie résultent de l'identité des nombres représentés sous différentes formes au moyen des signes convenus, tandis que les théorèmes de la géométrie ne sont vrais qu'en vertu des propriétés de l'espace ». Et plus loin : « Or, que ces distinctions successives (surface, ligne, point) s'arrêtent à la troisième, cela ne dépend pas de la nature de notre esprit, mais d'une propriété de l'espace, tel qu'il existe réellement, et qu'on exprime en disant qu'il a trois dimensions ».

(**) *Séances de l'École normale; Débats*, t. Ier, pp. 28-33; séance du 26 pluviose an III (14 février 1795), sous le titre : *Géométrie descriptive*, Monge professeur. Le passage complet est reproduit dans *Mathesis*, 1889, t. IX, pp. 139-141.

la parallèle unique, non seulement par une construction plane, mais aussi par une construction quelconque. Les trois espèces de géométrie sont caractérisées par les relations qui existent entre les trois côtés d'un triangle et l'un de ses angles, savoir :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right) \cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right) \sin\left(\frac{c}{k}\right) \cos A, . \quad . \quad (2)$$

$$\mathrm{Ch}\left(\frac{a}{l}\right) = \mathrm{Ch}\left(\frac{b}{l}\right) \mathrm{Ch}\left(\frac{c}{l}\right) - \mathrm{Sh}\left(\frac{b}{l}\right) \mathrm{Sh}\left(\frac{c}{l}\right) \cos A, \quad . \quad . \quad (3)$$

où k est la constante du système spécial de géométrie (2), l celle du système (3) (*).

III. On peut caractériser autrement les trois systèmes de géométrie, en ne faisant intervenir que les distances, et en excluant les angles, comme nous l'a fait observer M. De Tilly dans des communications encore inédites (**). La géométrie euclidienne (à trois dimensions), dans cette manière de voir, est contenue tout entière dans la relation de Lagrange entre les dix distances de cinq points. Cette relation a été mise par Caylay sous la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) Au point de vue analytique, on peut observer que (2) contient (3), si l'on fait $k = l\sqrt{-1}$, et (1) si l'on fait $k = \infty$. On peut faire la même observation au § III, sur les trois relations analogues à (4) : elles rentrent aussi l'une dans l'autre, moyennant des substitutions analogues. De plus, on pourrait y remplacer chaque distance Δ de deux points par une fonction quelconque $\varphi(\delta)$ d'une autre quantité, qui pourrait aussi être appelée distance de ces points, à un point de vue abstrait. Nous ne regardons pas comme distinctes la relation entre les dix distances Δ ou les dix distances δ de cinq points.

(**) Voir toutefois le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e sér., t. XIV (1887), p. 1015, lignes 21 à 25.

symétrique par rapport aux carrés d_{ik} des dix distances. Si l'on représente cette relation par (12345) = 0, et les relations analogues entre les points 1, 2, 3, 4, 6 et 1, 2, 3, 5, 6 par (12346) = 0 et (12356) = 0, on sait que ces relations (12345) = 0, (12346) = 0 et (12356) = 0, ont pour conséquences (12456) = 0, (13456) = 0 et enfin (23456) = 0.

Des relations analogues à (4) et jouissant de la propriété analogue caractérisent les deux sortes de géométrie non euclidienne, mais elles n'ont pas été données explicitement jusqu'ici.

La vérité la plus importante de la géométrie générale est celle-ci : il n'existe que trois relations analogues à (4) jouissant de la propriété signalée plus haut, laquelle exprime l'homogénéité de l'espace (*). Si l'on parvenait à démontrer directement ce théorème d'analyse, il en résulterait probablement une grande simplification dans l'exposé de la géométrie générale.

IV. La géométrie euclidienne est contenue implicitement tout entière dans la relation (4). La géométrie euclidienne plane est renfermée implicitement dans la relation analogue qui lie les distances x, y, z d'un point aux trois sommets d'un triangle ayant pour côtés a, b, c, savoir :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & z^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 & y^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 & x^2 \\ 1 & z^2 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou même dans la relation de Stevart,

$$b^2y + c^2z = ax^2 + ayz, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

si $a = y + z$.

Rien n'empêche d'introduire les angles *d'une manière pure-*

(*) Pour que ceci soit vrai, pris à la lettre, il faut préciser la notion de distance par cette condition supplémentaire : la somme 12 + 23 des distances 12, 23 a pour minimum la distance 13, quand 2 varie, 1 et 3 étant fixes.

ment formelle, dans cette géométrie où tous les théorèmes sont des relations entre les distances. Il suffit de définir les angles A, B, C d'un triangle par les formules

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc},$$

A, B, C n'ont ici aucune signification géométrique. La relation (5) exprime que les angles (xy), (xz) sont supplémentaires. On prouve aisément que $A + B + C = \pi$, angle (bx) + angle (cx) = angle (bc) ; angle (ab) = angle (zb), angle (ac) = angle (yc).

Grâce à cet emploi apparent des angles, on peut rapprocher l'exposé scientifique de la géométrie euclidienne de celui que l'on emploie ordinairement dans les manuels élémentaires (*) ».

La section procède ensuite au renouvellement de son Bureau. Sont élus pour l'année 1889-1890 :

Président,	MM.	Ch. Lagasse.
Vice-Présidents,		le Vte de Salvert et J. Carnoy.
Secrétaire,		H. Dutordoir.

Deuxième section.

—

Jeudi, 25 octobre 1888. — M. Lemoine présente quelques considérations relatives à l'action de la lumière sur les actions chimiques (Cette communication sera publiée ultérieurement dans les *Annales*).

Jeudi, 31 janvier 1889. — M. Van Biervliet fait connaître un nouvel aréomètre-balance imaginé par le professeur Joly et décrit

(*) Ceci suppose la trigonométrie générale établie indépendamment de la géométrie euclidienne. C'est ce qu'a fait Seidel dans le *Journal de Crelle,* 1871, t. LXXIII, pp. 273-291, d'une manière assez élémentaire (Voir Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis,* II, pp. 75-82).



par lui dans le *Philosophical Magazine.* Le flotteur est une sphère légère en verre ou en métal, portant un fil métallique fin auquel est suspendu un bassin de balance. Ce flotteur est immergé dans l'eau que renferme un vase en forme de ballon renversé. Un obturateur percé d'un petit trou pour le passage du fil fermant le goulot du ballon, l'eau se trouve maintenue par la pression atmosphérique. M. Joly montre sans peine que la sensibilité relative de son appareil est indépendante de la charge; il suffit d'ailleurs d'un milligramme sur une charge de 100 grammes pour écarter le flotteur de sa position d'équilibre.

Samedi, 4 mai 1889. — M. Witz présente la note suivante au sujet de la self-induction des courants :

« Les machines-dynamos excitées en série sont sujettes à de fréquents renversements de pôles, qui ont été signalés maintes fois dans la pratique, mais dont l'étude théorique n'a pas encore été faite; j'ai été amené à m'occuper de cette question par la rencontre fortuite d'une de ces machines douée d'une extrême instabilité. J'avais appliqué à un transport d'énergie à distance deux petits dynamos, du genre Édison, qui ne différaient l'un de l'autre que par le mode d'excitation du champ; la génératrice était auto-excitatrice, tandis que la réceptrice était excitée séparément. Les machines ayant pris leur allure, la différence des forces électro-motrices restait généralement constante; mais, pour peu que le travail de la réceptrice tombât au-dessous d'une limite donnée, et que, par suite, sa vitesse augmentât, on voyait que la force électro-motrice de la génération diminuait, et tout à coup la réceptrice ralentissait son mouvement, s'arrêtait, puis repartait en sens inverse. Dans des conditions déterminées, trouvées après quelques essais, on pouvait voir la réceptrice prendre un mouvement périodique alternatif, exécutant indéfiniment quelques tours à droite, quelques tours à gauche, avec une étonnante régularité. En même temps, les pôles de la génératrice s'intervertissaient : il s'agissait donc d'une inversion périodique des polarités de la série-dynamo.

Cette alternativité des pôles s'obtenait d'autant mieux que l'on

permettait à la réceptrice de prendre une vitesse plus grande et que le champ excité artificiellement dans l'entrefer était plus intense. Par contre, on l'évitait en réduisant le champ, de manière à empêcher toute augmentation de vitesse.

La première explication qui venait à l'esprit était la suivante : si nous appelons E la force électro-motrice de la génératrice, *e* la force contre-électro-motrice de la génératrice, on sait que $\frac{E-e}{R}$ donne l'intensité du courant du circuit; or, *e* est fonction de la vitesse de rotation de la réceptrice. Il existe une vitesse pour laquelle *e* est plus grand que E ; cette vitesse atteinte, le courant change de sens, et il doit en résulter une inversion des pôles de la série dynamo-génératrice.

Cette explication n'était pas bonne. En effet, voici ce que j'ai observé en mesurant avec soin les vitesses de rotation, les forces électro-motrices E et *e* et l'intensité *i* du courant. La génératrice faisant 1781 tours, elle développait, sur réceptrice calée, 10,3 volts; la réceptrice étant libre, celle-ci faisait 252 tours; or, les 252 tours de la réceptrice ne pouvaient donner que 0,98 volt de force contre-électro-motrice; il était donc inadmissible que *e* devînt supérieur à E.

Une étude plus complète était nécessaire pour arriver à une solution rationnelle du problème. Il fallut pour cela déterminer avec soin toutes les constantes des machines, les résistances des circuits inducteurs et induits, leur self-induction, l'intensité des champs, etc., etc., et nous fûmes amené à chercher les caractéristiques des machines pour diverses vitesses. Ces recherches nous conduisirent à l'application du phénomène; nous ne pouvons que l'indiquer sommairement.

Mettons-nous dans les conditions de l'activité maximum définie par Jacobi, la vitesse de la réceptrice étant la moitié de la génératrice, soit 1780 tours pour l'une, 890 pour l'autre. Construisons les génératrices correspondantes. Soit R la résistance totale du circuit; menons par l'origine des coordonnées une droite faisant avec l'axe des *x* un angle α tel que $\operatorname{tg}\alpha = R$. Cela fait, on tracera une tangente à la caractéristique parallèle à cette droite; elle coupe l'axe des *y* en un point que nous marque-

rons avec soin, car le point de contact et le point d'intersection ont une grande importance. Le premier donne par son ordonnée E, le second, par son abscisse, *e*, au moment de l'inversion du courant et des pôles. Cette construction, dont on peut varier les données d'après chaque condition de marche, permet de se rendre compte de tous les faits observés et d'en prévoir même beaucoup d'autres, dont la théorie des dynamos, qui est encore à faire, pourra tirer parti. »

M. Lemoine fait connaître le résultat de ses nouvelles études sur la dissociation.

Reprenant les expériences de M. Wurtz sur le bromhydrate d'amylène, il s'est attaché surtout à déterminer l'influence des variations de la pression (Cette communication sera insérée ultérieurement dans les *Annales*).

M. Van Biervliet expose la méthode dont il se sert pour obtenir des systèmes astatiques d'aiguilles aimantées : en cassant deux fragments égaux d'une même aiguille d'acier et en les plaçant sur le même électro-aimant, M. Van Biervliet obtient des systèmes pour lesquels la durée d'une oscillation double atteint 40 et même 50 secondes.

M. L. Henry entretient la section des recherches qu'il poursuit depuis plusieurs années sur la volatilité dans les composés carbonés.

Il s'occupe d'abord de la série des *éthers cyanés normaux* $CN - (CH_2)_n - C^{O}_{OC_2H_5}$.

On connaissait déjà dans le groupe les deux premiers termes,

éther cyano-formique $CN - C^{O}_{OC_2H_5}$ éb. à 115°

» cyano-acétique $CN - CH_2 - C^{O}_{OC_2H_5}$ éb. à 210°.

Par la réaction sur le cyanure de potassium *a*) de l'éther iodo-propionique β $ICH_2 - CH_2 - C^{O}_{OC_2H_5}$; *b*) de l'éther γ bromo-

butyrique $CH_2Br - (CH_2)_2 - C^{O}_{OC_2H_5}$, il a obtenu les deux termes suivants :

éther cyano-propionique $CN - (CH_2)_2 - C^{O}_{OC_2H_5}$ éb. à 228°,
» cyano-butyrique $CN - (CH_2)_3 - C^{O}_{OC_2H_5}$ — 245°.

On voit par là que, dans cette série, les relations de volatilité deviennent normales dès le troisième terme :

			Différence.
$CN - C\langle^{O}_{OC_2H_5}$,	éb.	115°	
			95°
$CN - CH_2 - C\langle^{O}_{OC_2H_5}$,	—	210°	
			18°
$CN - (CH_2)_2 - C\langle^{O}_{OC_2H_5}$,	—	228°	
			17°
$CN - (CH_2)_3 - C\langle^{O}_{OC_2H_5}$,	—	245°	

M. L. Henry traite ensuite de la *volatilité dans les dérivés des chaînes carbonées normales*

$$- CH_2 - CH_2 \; . \; . \; . \; . \; CH_2 - CH_2 \; . \; . \; . \; .$$

Quoique les faits connus soient encore peu nombreux, ils suffisent, selon M. Henry, pour établir cette proposition : la position du radical substituant X dans la chaîne n'influe que très faiblement sur la volatilité de la molécule totale lorsque les chaînons extrêmes CH_3 sont intacts.

Il n'en est pas ainsi lorsque ceux-ci ou du moins l'un d'entre eux a été l'objet d'une substitution antérieure.

C'est ce que montrent à l'évidence les dérivés acétiques des nitriles butyriques α et β hydroxylés : $CN - CH(OH) - CH_2 - CH_3$ et $CN - CH_2 - CH(OH) - CH_3$.

			Différence.
$CN - CH(C_2H_3O_2) - CH_2 - CH_3$	éb.	186°	24°.
$CN - CH_2 - CH(C_2H_3O_2) - CH_3$	—	210°	

Il est bon de noter qu'il n'existe qu'un seul acétate

$$CH_3 - CH(C_2H_3O_2) - CH_2 - CH_3,$$

de même qu'un seul alcool butylique secondaire

$$CH_3 - CH(OH) - CH_2 - CH_3.$$

M. Henry décrit ces composés et indique leur mode de production. Il fait connaître en même temps le nitrile correspondant γ oxy-acétique

$$CN - CH_2 - CH_2 - CH_2(C_2H_3O_2) \quad \text{éb.} \quad 237^\circ.$$

M. Henry s'occupe enfin de la volatilité dans les diacétones, composés dont on compte aujourd'hui un bon nombre, grâce aux recherches de divers chimistes et notamment de M. von Pechmann.

De l'ensemble de ses recherches, M. L. Henry déduit les propositions générales suivantes :

1° L'accumulation des radicaux substituants Cl, Br, etc., O, N, etc., dans un même point des molécules carbonées constitue pour celles-ci une cause puissante de volatilité.

Cette influence volatilisante peut aller jusqu'au renversement des relations normales de volatilité entre un composé et ses dérivés de substitution :

$CH_3 - CH_2(OC_2H_5)$	éb.	35°	> + 40°
$CH_3 - CO\ (OC_2H_5)$	—	75°	
$CN - CH_2(OC_2H_5)$	—	135°	> — 20°
$CN - CO\ (OC_2H_5)$	—	115°	
CH_2Cl_2	—	40°	> — 32°
$CO\ Cl_2$	—	8°	

2° Cette influence volatilisante dépend tout à la fois du nombre des radicaux substituants présents, de leur nature et de leur degré de rapprochement.

3° Elle est à son maximum alors que ces radicaux sont fixés sur le même atome de carbone.

4° Elle s'exerce encore alors qu'ils sont fixés sur des atomes de carbone distincts, mais voisins, c'est-à-dire directement unis.

5° Elle disparait totalement ou presque totalement par l'inter-

position d'un seul chaînon CH_2 entre les atomes de carbone distincts auxquels sont attachés les radicaux fonctionnels substituants X, X', X'', etc.

Ces recherches font partie des études que poursuit M. Louis Henry sur la solidarité fonctionnelle dans les corps composés, et notamment dans les composés carbonés, incontestablement un des chapitres les plus intéressants de la chimie intramoléculaire (*).

La section procède à l'élection de son bureau pour l'année 1889-1890. Sont nommés :

Président,	MM.	LEMOINE.
Vice-présidents,		WITZ et FR. DEWALQUE.
Secrétaire,		A. VAN BIERVLIET.

Troisième section.

Jeudi, 25 octobre 1888. — M. le secrétaire dépose un mémoire envoyé en réponse à la question mise au concours. La section charge MM. Proost, Storms et Buisseret de faire rapport sur ce travail.

M. Dollo expose le résultat de ses recherches sur les *Orthagoriscus* vivants et fossiles.

La section propose que son travail, accompagné de planches, paraisse aux *Annales* (ce mémoire sera publié dans un volume ultérieur des *Annales*).

M. De Lantsheere signale la découverte récente d'un grand nombre de textes cunéiformes rédigés en langue assyrienne, et il fait ressortir leur importance.

(*) Voir dans le *Bulletin* d'août 1889 de l'*Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XVIII, pp. 168-182, deux notes plus développées de M. Henry sur les recherches résumées dans la présente communication.



Jeudi, 31 janvier 1889. — M. Dollo développe de nouvelles preuves qui mettent en évidence l'existence des Costoïdes.

La section décide que sa note sera insérée ultérieurement aux *Annales*.

M. le secrétaire donne lecture d'un mémoire envoyé par M. l'abbé Smets sur les Siréniens rupéliens.

Jeudi, 2 mai 1889. — M. l'abbé Smets exhibe une pièce osseuse qu'il croit être l'hyoplastron d'un Sphargidé du laekenien, terrain dans lequel on n'a pas encore signalé de tortue semblable.

M. Dollo fait remarquer que l'on connaît des tortues voisines de Sphargis et provenant de l'éocène d'Angleterre.

M. Smets montre aussi un os qu'il considère comme le fémur d'une tortue d'eau douce; cet os provient du rupélien.

Jeudi, 4 mai 1889. — M. Dollo fait la communication suivante :

Sur quelques Mosasauriens nouveaux.

Ces Mosasauriens se rapportent à quatre genres différents, dont trois nouveaux. Ce sont: *Prognathosaurus Solvayi, Mosasaurus Lemonnieri, Oterognathus Houzeaui* et *Phosphorosaurus Ortliebi.* Ils proviennent de la craie brune phosphatée de Ciply (sénonien supérieur) et ont été généreusement donnés au Musée de Bruxelles par M. Alfred Lemonnier.

Le genre *Phosphorosaurus* (dont une partie du crâne seule est connue) est caractérisé par ses ptérygoïdes (distincts), son os carré (dont l'apophyse supracolumellaire, longue et pendante, est rejointe, à son extrémité inférieure, par une apophyse horizontale de l'extrémité distale dudit os), son frontal (étroit, à bords latéraux parallèles), son préfrontal et son postfrontal (exclus du bord supérieur de l'orbite), et son trou pariétal (énorme).

Le genre *Prognathosaurus* [connu par le crâne (entier et

admirablement conservé), la colonne vertébrale et la ceinture scapulaire] est fondé sur la diagnose ci-après : Prémaxillaire absolument privé de rostre (correspondant à un museau tout à fait camus), avec dents proclives, dont la couronne fait complètement saillie en avant. Dents susmaxillaires et mandibulaires aplaties bilatéralement, recourbées et à facettes bien marquées. Frontal large, triangulaire. Préfrontal et postfrontal formant le bord supérieur de l'orbite, au sommet de laquelle ils se rejoignent en pointe. Orbites latérales. Un anneau sclérotique. Trou pariétal, plutôt petit. Ptérygoïdes distincts, avec dents proportionnellement énormes. Os carré dont l'apophyse supracolumellaire va rejoindre, à mi-hauteur, une apophyse montante et oblique de l'extrémité inférieure dudit os. Apophyse coronoïde de la mandibule, forte. Pas de canal basioccipital médian. Hypapophyses libres. Pas de sacrum. Hæmapophyses soudées. Coracoïde sans échancrure. Pas d'interclavicule. Le crâne de *Prognathosaurus Solvayi* mesure environ 0^{m},60 de long.

Le genre *Oterognathus* (connu par la mandibule, des parties du crâne et la colonne vertébrale avec ses appendices) est basé sur la diagnose suivante : Dents mandibulaires coniques, recourbées, striées, avec un bord tranchant antérieur et un bord tranchant postérieur, s'arrêtant assez longtemps avant la fin de l'élément dentaire. Ptérygoïdes distincts, avec dents disposées en arc de courbe à point d'inflexion. Mandibule extrêmement grêle avec apophyse coronoïde (et élément coronoïde) rudimentaire faisant à peine saillie sur le bord alvéolaire. Un anneau sclérotique. Pas de sacrum. Hæmapophyses libres.

La section procède au renouvellement de son bureau qu'elle constitue de la manière suivante :

Président, MM. DOLLO.
Vice-Présidents, le chanoine SWOLFS, et le R. P. VAN DEN GHEYN.
Secrétaire, BUISSERET.

Quatrième section.

—

Jeudi, 25 octobre 1888. — Le secrétaire lit une lettre que Mme Schneider a adressée au bureau de la section pour la remercier des paroles d'éloges prononcées sur la tombe de son mari par M. le Dr Cuylits. Puis on procède à la nomination d'un président de la section en remplacement de M. le Dr Schneider.

M. le professeur Venneman, vice-président, est appelé au fauteuil de la présidence, et il est remplacé comme vice-président par M. le D^r^ Mœller.

Conformément à l'ordre du jour, M. Cuylits expose quelques considérations sur certaines mesures craniométriques.

On a prétendu que la fossette palatine était un caractère propre aux dégénérés. C'est à tort, d'après M. Cuylits, car bien des gens à fossette palatine pourraient, sous le rapport de l'intelligence, faire envie à ceux qui ne possèdent point cette particularité anatomique. Mais il est un rapport bien moins trompeur qui caractérise les dégénérés : c'est celui qui existe entre le diamètre transversal de la voûte palatine et le même diamètre du crâne, tous les deux étant pris dans leurs plus grandes dimensions. Ce rapport serait, dans la plupart des cas, comme 1 est à 6. M. Cuylits nous montre la photographie d'un imbécile qui n'est parvenu à acquérir que des connaissances élémentaires. A la moindre excitation, il devient incohérent. Le diamètre transversal de sa voûte palatine mesure 25 millimètres, celui de son crâne, 160 millimètres, ce qui donne le rapport de 1 à 6,4.

Cet homme a été hydrocéphale, c'est-à-dire que son cerveau, subissant la poussée centrifuge du liquide encéphalo-rachidien, a déterminé l'expansion du crâne.

Le rapport sus-indiqué se rencontre le plus ordinairement chez les dolichocéphales, rarement chez les brachycéphales. A ce propos, M. Cuylits fait remarquer que le type dolichocéphale se rencontre surtout dans la race germanique, le type brachycéphale chez la race celtique; que le brachycéphale semble

doué de plus de vitalité que le dolichocéphale, et que dans les unions entre Celtes et Germains, le type celte, qui se caractérise par le teint brun, les cheveux noirs, une taille peu élevée, paraît l'emporter sur le type germain qui, outre la dolichocéphalie, a pour apanage des yeux bleus, un teint pâle, une chevelure blonde et une taille élevée.

M. le professeur Verriest admet que souvent, le plus ordinairement même, c'est le cerveau qui commande la forme du crâne, à condition toutefois que les sutures osseuses se consolident à leur temps. Si la consolidation de l'une d'elles est prématurée, la croissance du cerveau s'en trouve arrêtée à son niveau, et l'organe encéphalique pousse ses dimensions en dehors de son influence. Ainsi, par exemple, si l'ossification précoce envahit les sutures des régions pariétale et temporale, le cerveau se développe d'avant en arrière et réalise le type dolichocéphale. Néanmoins, on peut admettre, dans une certaine mesure, que le développement du crâne, indépendamment de l'ossification de ses sutures, règle le développement du cerveau.

M. le professeur Lefebvre admet aussi l'influence des sutures prématurées sur certains arrêts de développement du crâne.

Il cite le cas d'un idiot dont le crâne était comme fondu d'une pièce. Pour lui aussi, le liquide hydrocéphalique, par la compression qu'il exerce sur le cerveau, peut oblitérer certaines facultés sans porter atteinte à d'autres. Certains hydrocéphales sont d'excellents mathématiciens.

M. Verriest rappelle à ce propos que Wagner, qui avait été rachitique, était un ancien hydrocéphale.

M. Huyberechts rapporte qu'un enfant, dont les fontanelles se sont prématurément ossifiées, avait une intelligence fort obtuse et était sujet à de fréquents spasmes de la glotte.

M. Proost s'étonne de l'assertion de M. Cuylits, au sujet de la prétendue absorption de la race germanique par la race celtique, et il se demande comment cette donnée peut se concilier avec la persistance actuelle du type germanique.

M. Cuylits répond que la phtisie épargne relativement le Celte pour s'en prendre souvent au Germain.

Enfin, pour M. Borginon, l'influence des races sur leur degré de résistance aux maladies ne serait pas telle qu'on veut bien le dire. Il croit, au contraire, que cette influence relève bien plus des conditions hygiéniques, de la manière de vivre et du milieu, que des types divers dont se compose l'humanité.

Enfin, le dernier objet à l'ordre du jour est une communication des plus intéressantes de M. le professeur Verriest, relativement à la saignée. Le temps a malheureusement manqué à l'orateur pour exposer tout son sujet. Mais nos collègues trouveront, dans un discours prononcé par M. Verriest à l'Académie de médecine, et reproduit par la *Revue médicale,* les développements complémentaires de sa conférence.

A la séance du 25 octobre, M. Verriest nous rappelle que les questions relatives à la saignée doivent trouver leur solution, comme beaucoup d'autres sujets d'ailleurs, dans deux sources distinctes de renseignements, qu'il faut contrôler l'une par l'autre : l'expérience et l'induction.

Sous ce rapport, nous possédons aujourd'hui des éléments qui faisaient défaut à nos prédécesseurs. La marche naturelle des maladies est mieux connue qu'elle ne l'était autrefois; les statistiques se sont multipliées à l'infini et, d'autre part, la partie expérimentale et physiologique de la saignée a été sérieusement étudiée.

Pour entretenir une irrigation sanguine continue et régulière dans tous les organes, il faut d'abord un réservoir soumis à une constante et forte pression : c'est le système artériel; il faut un moteur puissant : c'est le cœur; et il faut enfin une sorte de barrage à la sortie du sang. Cette barrière est constituée par les anneaux musculaires placés à l'extrémité des divisions artérielles et animés par les nerfs vaso-moteurs. Dans les conditions ordinaires d'un fonctionnement normal, pour que la tension sanguine soit constante, il importe que la quantité de sang lancée par le cœur à chaque systole, dans le système artériel, soit égale à celle qui en sort au même moment; il faut que l'élasticité des artères soit intacte et que la contractilité des fibres musculaires

périphériques obéisse à l'influence des vaso-moteurs. On comprend cependant que l'équilibre de cette tension puisse se mouvoir dans d'assez larges limites.

L'ouverture d'une artère romprait cet équilibre, s'il n'y était pourvu immédiatement par un jeu adéquat des vaso-moteurs.

Ils contractent, en effet, les vaisseaux périphériques, dont la lumière ainsi rétrécie donne passage à une moindre quantité de sang, et ce moindre débit maintient à son niveau une tension compromise par un apport atténué.

C'est par un mécanisme semblable qu'il est pourvu au trouble qu'apporterait à la tension sanguine l'ouverture d'une veine. On conçoit néanmoins qu'au delà d'un certain écoulement, cette tension est impossible à maintenir.

Les physiologistes ont démontré qu'un animal sain peut perdre le tiers de son sang sans compromettre sa tension intravasculaire, et les expériences de M. le professeur Denys, au sujet de la régénération du sang, ont prouvé que tous les deux jours on peut enlever impunément à un animal le tiers de son sang, de façon à lui faire perdre en un mois cinq fois la masse de ce liquide.

Mais si la résistance de l'organisme sain aux soustractions sanguines est énorme, il n'en est pas de même de l'organisme malade. C'est ce que prouve la remarquable expérience de Ludwig.

Ce physiologiste fait la section du nerf grand splanchnique. Il paralyse par là même les fibres vaso-motrices dépendantes de ce nerf. Aussitôt les vaisseaux terminaux des viscères de l'abdomen se relâchent, le sang s'y précipite en abondance au détriment des autres organes frappés d'anémie, et l'animal succombe à la syncope.

Il est évident qu'une paralysie moins complète des vaso-moteurs ne détermine pas pareille dilatation vasculaire, et il faudrait l'intervention d'une saignée complémentaire pour amener l'anémie aiguë.

Des conditions correspondantes peuvent se rencontrer chez l'homme, qu'elles soient dues à des paralysies périphériques

causées par l'intoxication alcoolique ou nicotinique, par des températures élevées, par des lésions anatomiques, par une inflammation, par l'artériosclérose, par des neurasthénies vasculaires ou des névroses du sympathique, comme celles que l'on rencontre dans la maladie de Graves. Il est certain que toutes ces conditions commandent une grande réserve vis-à-vis de la saignée.

Quant au cœur, M. Verriest trouve qu'on l'accuse trop facilement d'amener les désordres circulatoires. Souvent, au contraire, il doit les subir pour avoir lui-même à en souffrir.

La cause du mal se trouve alors dans les vaisseaux périphériques paralysés par l'inflammation ou dans les artères désorganisées par l'athérome, c'est-à-dire dans le système circulatoire tout entier, dont on ne doit considérer le cœur que comme une simple section. Le cœur, d'ailleurs, présente des ressources infinies pour remédier aux troubles circulatoires, et il est rare qu'une affection cardiaque isolée soit une contre-indication aux soustractions sanguines.

Quant à la quantité et à la répartition du sang dans les différents organes, elles sont extrêmement variables, et nous savons combien aussi elles sont sous la dépendance du jeu des vasomoteurs. Avant de pratiquer une saignée, et surtout d'en fixer l'importance, on devra s'assurer de la nature des conditions qui font en quelque sorte stagner le sang dans différents territoires, si l'on veut éviter de provoquer subitement l'anémie d'autres régions.

Les affections inflammatoires de l'abdomen, les sudations abondantes, la période de la digestion, l'usage des drastiques demandent, quand il s'agit de la saignée, une surveillance toute spéciale.

Ici s'arrêta, faute de temps, la conférence de M. Verriest.

Jeudi, 2 mai 1889. — M. Goris fait une intéressante communication sur les tumeurs de l'arrière-nez, spécialement au point de vue opératoire. Il décrit les principales espèces de tumeurs que l'on rencontre dans cette région et l'appareil instrumental auquel on a recours pour les enlever.

M. le professeur Lefebvre demande à M. Goris ce qu'il pense du bromure de potassium comme anesthésique, et s'il ne croit pas que son action est plus pénétrante que celle de la cocaïne.

Sans nier cette influence, M. Goris estime que le bromure a contre lui les fortes doses qu'il nécessite pour agir, et la lenteur ou le retard de ses effets, si on le compare à la cocaïne.

M. le D[r] Glorieux présente ensuite deux malades atteints, d'après lui, de paralysie agitante, de formes différentes.

L'un est un homme de 50 ans environ, qui s'est présenté il y a un mois à la consultation de M. Glorieux. Il n'offre aucun antécédent morbide; son intelligence est intacte, mais depuis trois ans et demi il est frappé de raideur musculaire et d'une torpeur généralisée. Pour copier deux lignes, il lui faut dix minutes. La figure de cet homme est immobile comme un masque. Aucune partie du corps n'est d'ailleurs atteinte de tremblement. Les auteurs donnent comme principaux symptômes de la paralysie agitante la raideur musculaire et le tremblement; de ces deux manifestations, la première doit être considérée comme la plus importante.

Outre sa figure impassible, le malade présente un front profondément ridé transversalement, des sourcils relevés. Les doigts sont étendus, raides. Il appartient au type de paralysie avec extension, tandis que d'autres présentent le type de paralysie avec flexion.

Quand il se meut, il avance vers la droite; d'autres, au contraire, marchent droit devant eux. Il présente de l'exagération des mouvements réflexes ; chez d'autres, on constate que ces mouvements sont abolis.

Malgré cet ensemble de symptômes, M. le D[r] Cuylits ne considère pas le malade comme atteint de paralysie agitante. Il le croit plutôt frappé de paralysie générale. Mais l'absence de troubles intellectuels, le manque de vomissements, la marche empesée, la lenteur de la maladie, bien qu'elle soit progressive, engagent M. Glorieux à maintenir son diagnostic. La suite de la maladie en éclaircira sans doute la nature.

Le second malade présenté par notre collègue offre un type plus caractérisé. Il a aussi la face immobile, les membres raides ; mais ses mains sont tremblantes. Il a la marche empesée, la parole lente et ses mouvements réflexes sont exagérés.

A la séance du 25 octobre 1888, et précédemment encore, à la séance du 27 octobre 1886, M. le Dr Cuylits nous avait entretenus d'une particularité anatomique présentée par le crâne de certains aliénés Il s'agissait de l'étroitesse de la voûte palatine mise en regard de la largeur du crâne.

Notre confrère revient aujourd'hui sur le même sujet pour le confirmer à nouveau et présente, à l'appui de son dire, la photographie d'un aliéné en traitement dans l'établissement dont il a la direction médicale. Chez un sujet sain, il existe entre la voûte palatine et la largeur du crâne le rapport assez constant de 1 à 4. Chez les dégénérés, la voûte palatine, fréquemment réduite, modifie ce rapport dans les limites de 1 à 5, 5 $^1/_2$ et 6 $^1/_2$.

La photographie présentée par M. Cuylits est celle d'un épileptique dont la voûte palatine mesure 29 millimètres et le diamètre transversal du crâne 168 millimètres, c'est-à-dire qu'ils sont entre eux dans le rapport de 1 à 5,7.

Pour expliquer l'étroitesse de la voûte palatine et l'exagération du diamètre transversal du crâne, M. Cuylits avait invoqué l'existence d'un mouvement de rotation des os pariétaux, des temporaux et des maxillaires, faisant système, autour d'un axe fictif antéro-postérieur et passant par l'articulation temporo-maxillaire. Ce mouvement trouverait ordinairement sa raison d'être dans l'hydrocéphalie du jeune âge ou une autre maladie du cerveau.

Mais il parait, ajoute M. Cuylits, que normalement, chez les nouveau-nés, on voit souvent la voûte palatine s'accroître dans le sens de sa longueur et se rétrécir dans le sens transversal.

La rupture du rapport qu'il constate, chez les aliénés, entre la voûte palatine et le crâne, ne serait due ainsi qu'à l'exagération d'une modification qui se produirait souvent dans notre jeune âge.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 25 OCTOBRE 1888.

Dans l'assemblée générale du 25 octobre, la conférence a été faite par M. A. Buisseret, préfet des études et professeur au collège communal de Nivelles, sur *les stations zoologiques au bord de la mer*.

Depuis quelques années, il s'est établi au bord de la mer des stations où les savants vont observer et étudier la faune si riche, si variée et si intéressante des océans; on trouve des laboratoires de ce genre en Angleterre, en Allemagne, en France, en Italie, en Autriche, en Hollande, en Amérique, en Australie.

Quelques-uns de ces observatoires zoologiques ont été fondés par l'État; la plupart sont dus à l'initiative de quelque savant ou d'une société scientifique.

Certains d'entre eux sont fort modestement installés; ainsi les Hollandais possèdent une station *volante,* faite tout entière en bois, qu'on peut démonter et remonter en moins de trois jours; on la déplace donc facilement d'une année à l'autre, ce qui permet d'étudier successivement les populations animales des différentes régions de leurs côtes, si pauvres au point de vue zoologique.

La station de Roscoff, petite ville du département du Finistère, est une dépendance de la Sorbonne. Les naturalistes qui y séjournent profitent de ce que la marée basse découvre une grande étendue de la grève pour se mettre « en chasse. » Chaussés de grosses espadrilles, munis de seaux en toile, de bocaux et de leviers, ils inspectent les flaques d'eau, fouillent le sable mouillé et soulèvent les pierres; une telle excursion est toujours intéres-

sante, instructive et fructueuse. A certains jours, les embarcations du laboratoire conduisent les naturalistes jusqu'en pleine mer; là, on jette la *drague*, c'est-à-dire un cadre de fer muni en arrière d'un filet en forme de poche; le cadre racle le fond de la mer, détache les animaux qu'il rencontre et les jette pêle-mêle avec des cailloux et de la vase dans le filet. On drague en outre au moyen de filets de toutes sortes et de gros paquets d'étoupe, appelés *fauberts*, qui accrochent et ramènent les animaux les plus variés.

Dans les laboratoires, les chercheurs trouvent tous les instruments nécessaires à l'examen, à la dissection et à l'observation des animaux. — Ce serait d'ailleurs une erreur de croire que ces travaux n'ont qu'une utilité purement scientifique. Le conférencier cite à plusieurs reprises des localités où la pisciculture et surtout l'ostréiculture ont pris un essor considérable grâce aux recherches entreprises dans les laboratoires voisins.

Plusieurs stations zoologiques sont établies sur les bords de la Méditerranée. Une des plus anciennes, la mieux outillée et la plus célèbre, est celle de Naples, fondée et entretenue principalement par des capitaux allemands; la construction, l'ameublement scientifique et les machines ont coûté environ 370,000 francs; actuellement, les dépenses annuelles sont à peu près de 100,000 francs.

Comme il n'y a pas de marée dans la Méditerranée, les procédés employés pour la récolte des animaux n'y sont pas ceux qui ont été indiqués tout à l'heure. Parfois on se contente de ramasser les animaux que les vagues rejettent sur la côte; quand on le peut, on profite de la transparence des eaux pour pêcher près du littoral; souvent les embarcations du laboratoire conduisent les savants au large, et là on recourt à la drague, aux fauberts et aux filets. Enfin quelques stations, notamment celle de Naples, possèdent un *scaphandre* ou appareil à plongeur; grâce à cet engin, des naturalistes parviennent à séjourner sans inconvénient pendant deux heures à une profondeur de 10 mètres. Cette méthode de recherche est préférable à la drague, qui endommage beaucoup d'animaux et en laisse échapper un grand nombre.

En Belgique, depuis une cinquantaine d'années, M. P.-J. Van Beneden, l'illustre professeur de l'Université de Louvain, possède à Ostende un laboratoire particulier, où il a entrepris des recherches mémorables, et où sont venus travailler bien des naturalistes étrangers aujourd'hui célèbres.

Il y a quelques années, on a installé fort modestement, toujours à Ostende, une station qui était en quelque sorte une annexe des universités de Gand et de Liége, sous la direction M. Éd. Van Beneden. On y a entrepris des dragages méthodiques, qui ont appris que la faune de nos côtes est relativement riche.

Enfin, à une séance récente de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, M. P.-J. Van Beneden appuyait, dans le rapport qu'il avait été chargé de présenter, un projet émané de M. de Stuers pour la création à Ostende d'un grand aquarium, qui serait pour le public une source de distractions et servirait en même temps les intérêts de la science et des pêcheries nationales.

La *Revue des questions scientifiques*, livraisons de janvier et d'avril 1889, a publié les développements de cette conférence.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 31 JANVIER 1889.

M. le lieutenant général Jacmart, membre de la Chambre des Représentants, entretient l'assemblée *du Congo et de l'œuvre antiesclavagiste de Belgique.*

Le général Jacmart expose d'abord brièvement les actes de la Conférence de Berlin qui ont déterminé les relations entre le nouvel État Indépendant du Congo et les puissances ayant des possessions en Afrique.

Il indique quelles sont les limites du nouvel État, et pour quelles raisons elles ont été fixées de la manière un peu bizarre qu'elles affectent.

Après avoir rendu justice aux efforts généreux faits par le Roi des Belges pour arriver à la constitution actuelle de l'État Indépendant, et avoir montré quels énormes avantages la Belgique pourrait retirer d'une union plus intime avec cet État, le général passe aux motifs qui ont guidé l'Association anti-esclavagiste dans l'œuvre qu'elle a commencée.

Il discute les moyens d'action de cette association, et démontre que non seulement son entreprise n'est pas impossible, comme on l'a dit, mais qu'elle a toutes chances de réussir.

Il termine par un appel chaleureux au concours de tous les Belges pour fournir à l'Association les moyens matériels de mener à bien sa généreuse entreprise.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 2 MAI 1889.

La Société scientifique de Bruxelles ayant perdu inopinément son secrétaire, le R. P. Carbonnelle, enlevé par la mort le 4 mars précédent, le Président de la Société, M. Georges Lemoine, ingénieur en chef des ponts et chaussées et examinateur de sortie à l'École polytechnique, a bien voulu se charger de faire le rapport annuel. Voici le texte de ce rapport :

Messieurs,

En nous retrouvant ensemble dans cette session de Pâques, notre sentiment à tous est celui d'une profonde tristesse. C'est en ce moment que notre cher et vénéré secrétaire, le R. P. Carbonnelle, devait vous entretenir, comme il le faisait depuis treize ans, de la situation de la Société scientifique de Bruxelles. Il en avait été le principal fondateur, il en était l'âme, il nous y avait tous attirés. Il a été enlevé à notre respectueuse affection, au moment où nous croyions tant pouvoir compter encore sur lui. Son souvenir et ses enseignements resteront vivants parmi nous; nous espérons qu'il contribue encore du haut du ciel à

soutenir cette société qui lui doit tant de reconnaissance et qui a été l'œuvre principale de sa vie.

Le R. P. Carbonnelle avait le rare privilège de réunir des qualités qui, le plus souvent, se trouvent seulement isolées chez les hommes. Il joignait à une rare intelligence une prodigieuse puissance de travail; il avait l'esprit d'invention d'un savant mathématicien avec une érudition profonde, avec une admirable facilité de vulgarisation. Par-dessus tout, il était un grand et vigoureux chrétien, un prêtre plein d'ardeur pour sa foi, comprenant toutes les nécessités et tous les besoins du temps présent.

C'est notre désir à tous que l'association de ces deux grandes forces, la science et la foi, soit de plus en plus fréquente, comme elle l'a été aux grands siècles de la civilisation chrétienne. Pour faire disparaître les attaques faites à la foi religieuse au nom de la science, le meilleur moyen est de montrer qu'il y a beaucoup de vrais savants qui sont en même temps de vrais chrétiens.

Outre notre très regretté secrétaire, la Société a eu la douleur de perdre depuis un an treize autres membres.

(Ici l'orateur donne lecture de la liste des membres décédés. Voir plus haut, page 32.)

M. de Cannart d'Hamale était un de nos membres fondateurs.

M. le D[r] Delgeur avait été président de la Société en 1882-1883. Il était bien connu par son érudition, par ses travaux de géographie et d'égyptologie; c'était l'un des plus fidèles collaborateurs de la *Revue des questions scientifiques*.

Dans la vie, pour les sociétés comme pour les individus, les événements tristes s'entre-croisent avec les événements heureux.

Une des grandes satisfactions qu'a éprouvées depuis un an la Société scientifique de Bruxelles a été l'élévation de l'un de ses fondateurs, M[gr] Goossens, archevêque de Malines, à l'éminente dignité de cardinal. Nous avons ainsi à l'heure présente trois cardinaux parmi nos membres : leurs Ém[es] M[grs] Haynald, Vannutelli et Goossens.

Ces jours derniers, S. Exc. M[gr] Ferrata, nonce apostolique à

Bruxelles, a bien voulu accepter d'être membre de notre Société, comme pour continuer et confirmer les encouragements que nous a déjà donnés plusieurs fois le Souverain Pontife.

C'est pour nous tous un grand honneur d'avoir dans notre association ces hauts dignitaires de l'Église : c'est en même temps un précieux appui pour le présent et pour l'avenir de la Société.

Dans l'ordre scientifique, nous avons aussi plusieurs événements heureux à mentionner.

M. de Heen, professeur à l'Université de Liège, a été élu membre de l'Académie royale de Belgique.

M. de Bussy, directeur des constructions navales à Paris, et héritier des traditions établies pour la marine française par Dupuy de Lôme, a été élu membre de l'Institut.

M. Boussinesq, également de l'Institut, est devenu membre de notre Société : il lui est aussi fidèlement attaché que l'était son illustre prédécesseur M. de Saint-Venant.

M. Dollo, notre conférencier d'aujourd'hui, vient de recevoir à Londres, pour ses travaux paléontologiques, la haute distinction du prix *Lyell*. C'est la première fois que ce prix est décerné à un savant belge. M. Dollo l'a obtenu tout entier, sans partage, ce qui n'est arrivé que sept fois en quinze ans.

Après la perte si douloureuse de notre éminent secrétaire, notre situation peut se comparer à celle d'une famille de frères qui ont perdu leur père. Au milieu de leur deuil et malgré leur chagrin, il leur faut s'occuper d'affaires, se mettre au courant des détails d'une administration dont les déchargeait la sollicitude d'un père bien-aimé.

C'est ainsi que le devoir de votre président est aujourd'hui de vous faire connaître exactement l'état où le R. P. Carbonnelle a laissé l'œuvre qu'il a fondée avec vous.

Le nombre des membres de la *Société scientifique de Bruxelles* est aujourd'hui de 523, dont 340 Belges et 183 étrangers. Il était l'année dernière de 540. Les décès suffisent à peu près à expliquer cette diminution. Cependant il faut tous nous rappeler

combien le R. P. Carbonnelle nous recommandait de faire un peu de propagande, en Belgique surtout.

La *Revue des questions scientifiques* compte aujourd'hui 831 abonnés; il y en avait 853 il y a un an : ici encore la diminution peut être attribuée aux décès. Ce nombre si considérable d'abonnés montre la puissance qu'a aujourd'hui cette œuvre de vulgarisation.

L'état détaillé des comptes, qui va vous être présenté par M. le Trésorier, vous montrera que les finances de la Société sont dans une situation excellente. Ce résultat est dû, pour une grande partie, au R. P. Carbonnelle, car il s'occupait très activement de l'administration aussi bien que de la direction scientifique.

Le Conseil de la Société espère être prochainement à même de vous faire des propositions définitives pour reconstituer le secrétariat, si malheureusement vacant depuis bientôt deux mois. En attendant, rien n'est arrêté dans le fonctionnement régulier de notre œuvre. Toutes les affaires courantes sont expédiées par le R. P. George, qui était déjà associé au travail du R. P. Carbonnelle. Les Pères du Collège de Saint-Michel veulent bien toujours donner l'hospitalité à notre secrétariat, et c'est toujours 14, rue des Ursulines, à Bruxelles, que toutes les communications doivent être adressées.

Nos publications avaient été préparées par le P. Carbonnelle avec son soin habituel. Quoique surpris par la mort, il a laissé les affaires de la Société en si bon ordre que tout ce qu'il avait entrepris a pu être continué sans interruption.

Ainsi le numéro d'avril 1889 de la *Revue des questions scientifiques* a pu être imprimé et distribué sans aucun retard. On arrivera certainement à faire paraître de même le numéro de juillet.

Les *Annales* de la Société se trouvent en retard, car le volume de 1887-1888 n'a pas encore paru. Il est prêt, cependant, et sera distribué d'ici à un mois environ. Le volume suivant de 1888-1889 paraîtra également d'ici à la fin de l'année, et ainsi tout se trouvera au courant.

La réduction à trois jours de notre session actuelle et la fixa-

tion des dates décidées par le conseil ont été motivées principalement par la réunion du congrès catholique tenu à Malines : on a voulu éviter la coïncidence des deux réunions.

Cet exposé suffit pour montrer dans quelle situation prospère le R. P. Carbonnelle a laissé l'œuvre à laquelle il s'était consacré tout entier depuis quatorze ans. Peu d'entreprises ont eu un succès comparable à la sienne. Il a fait une réalité de ce rêve de tant de grands esprits : une sorte d'union internationale entre les hommes de science animés de l'esprit chrétien.

L'avenir de cette œuvre dépendra de chacun de nous, de notre union, de notre zèle à recruter de nouveaux membres, de l'assiduité aux réunions, des travaux que nous apporterons à nos publications; car, il ne faut pas l'oublier, la vie d'une société consiste avant tout dans ses publications.

Je termine, Messieurs, par où j'aurais dû commencer; je ne saurais assez vous remercier du grand honneur que vous m'avez fait en m'appelant à vous présider pendant l'année 1888-1889 : cette haute distinction restera l'un de mes meilleurs souvenirs. Lorsque votre sympathie pour la France a bien voulu, sur l'indication trop bienveillante du R. P. Carbonnelle, se porter sur mon nom, je ne me doutais pas devoir terminer sans lui, si tristement, cette quatorzième année d'existence de la Société scientifique de Bruxelles. Dans cette douloureuse circonstance, je n'ai guère pu vous apporter que l'assurance de mon dévouement au but qu'elle poursuit. Tout ce qu'il y avait à faire pour les intérêts de notre œuvre a pesé sur mes deux collègues dans la présidence, M. Cousin et M. Lagasse, assistés du conseil. M. Lagasse, par suite de sa résidence à Bruxelles, s'est trouvé être votre délégué permanent. Je suis heureux de le remercier, en votre nom comme au mien, de tout ce qu'il a fait pour la Société, car je sais avec quel zèle, quelle intelligence, quelle sagacité il a travaillé pour vous. Dans quelques jours, vous appellerez à la présidence, suivant l'usage, un de nos collègues de Belgique. Héritier des idées du R. P. Carbonnelle, il pourra

donner une direction suivie et efficace à la Société dans la situation nouvelle où elle se trouve.

Mais le but qui nous a réunis est tellement élevé, ce but est si bien compris par tous les chrétiens vraiment intelligents et instruits, qu'il faut avoir confiance et en vous-mêmes et en la Providence. Votre œuvre, Messieurs, doit survivre à l'homme si éminent et si regretté qui l'a fondée avec vous, et qui l'a fait prospérer avec votre concours pendant tant d'années.

M. Jules De Bruyn, trésorier de la Société, donne ensuite lecture du rapport suivant :

Situation au 31 mars 1889.

DÉBIT.

Frais de bureau, de banque et de recouvrement, fr.	388	30
— de sessions.	383	45
Impression et expédition des *Annales*	3,278	07
Revue des questions scientifiques :		
a) Collaboration	4,465	55
b) Impression	7,989	52
Aux secrétaires des sections (indemnités). . . .	100	»
Avoir au 31 mars 1889	119,297	74
TOTAL. . . fr.	135,902	63

CRÉDIT.

Encaisse chez le secrétaire . . . . fr.	2,819	22
Dépôt à la Société générale	94,665	»
Compte courant à la Société générale	738	42
— chez Delloye	23,479	40
121 cotisations	1,805	»
1 part de fondateur.	500	»
610 abonnements à la *Revue*.	11,895	59
TOTAL. . . fr.	135,902	63

M. le Président propose à l'assemblée de nommer, pour vérifier le compte rendu du trésorier, MM. Lagasse et Otto. — Adopté.

M. L. Dollo, aide-naturaliste au Musée de Bruxelles, fait ensuite une conférence sur *Le vol chez les Vertébrés.*

Après avoir défini ce qu'on doit entendre par Vertébrés et Invertébrés, M. Dollo rappelle que les premiers de ces animaux, notamment, renferment des types, les uns exclusivement aquatiques (ex. : poissons), d'autres amphibies (ex. : phoques), d'autres terrestres (ex. : chevaux), d'autres souterrains (ex. : taupes), d'autres enfin aériens (ex. : oiseaux).

Le conférencier a choisi ces derniers comme objet de sa causerie et s'est proposé de montrer de combien de manières différentes les Vertébrés peuvent voler.

Il a d'abord distingué le *vol passif* et le *vol actif.* Le premier n'est, à proprement parler, qu'un saut vertical prolongé, et l'organe mis en jeu pour le réaliser est un véritable *parachute* (ex. : polatouche ou écureuil volant). Le second est le vol au sens ordinaire du mot; son organe est l'*aile* (ex. : oiseau).

Mais il faut distinguer encore deux sortes d'ailes : il y en a qui sont constituées par une *membrane* (chauve-souris, ptérodactyle), tandis que d'autres sont confectionnées à l'aide de *plumes* (oiseau).

Cela posé, M. Dollo explique que les oiseaux volent surtout avec le bras et l'avant-bras; les chauves-souris, principalement avec la main; les ptérodactyles, essentiellement avec le cinquième doigt (correspondant à notre petit doigt) démesurément allongé.

L'orateur examine ensuite quelques types curieux d'oiseaux, de chauves-souris et de ptérodactyles.

Parmi les premiers, il cite l'*Archéoptéryx*, ce remarquable oiseau fossile qui, au lieu de bec, avait une gueule armée de dents. Cet être bizarre avait deux petites ailes rondes, ne s'étendant pas sur les mains (encore formées par trois doigts libres et pourvus de griffes). En dehors des ailes, l'Archéoptéryx n'avait, comme plumes, qu'une collerette, comme les condors; des culottes,

comme les faucons; et une paire de rectrices à chaque vertèbre de son énorme queue osseuse. C'est la naissance du type oiseau.

M. Dollo expose, après cela, sa dégradation. Les oiseaux actuels, au moins les bons voiliers, ont encore trois doigts distincts, quoique soudés. L'autruche, aux ailes rudimentaires, n'en a plus que deux. L'émeu n'en a plus qu'un. L'aptéryx, qui n'en a qu'un aussi, a, en outre, l'humérus caché sous la peau, de sorte que le moignon est à peine détaché du tronc. Enfin, l'*Hesperornis*, oiseau fossile, denté, n'avait plus que l'humérus, c'est-à-dire qu'extérieurement il ne montrait plus la moindre trace d'aile.

Parmi les chauves-souris, le conférencier distingue les *frugivores*, qui sont les plus primitives, car elles ont encore deux griffes à l'aile (pouce et index); ce sont aussi les plus volumineuses. Les autres, *insectivores*, de petite taille, n'ont plus qu'une seule griffe (pouce).

Enfin, dans les ptérodactyles, on remarque les *Ptérodactyles* proprement dits, qui ont des dents et pas de queue; les *Rhamphorhynques*, qui ont un bec, des dents et une longue queue; et les *Ptéranodons*, qui n'ont ni dents, ni queue et qui, gigantesques *chauves-souris à écailles*, atteignaient jusqu'à 8m25 d'envergure.

M. Dollo a la conviction que ces êtres fantastiques ont autrefois habité la Belgique, et il exprime, pour finir, l'espoir qu'on découvrira leurs restes dans la craie brune exploitée dans les environs de Mons pour le phosphate de chaux.

Il est à souhaiter que le Musée de Bruxelles, déjà si remarquable par ses Iguanodons, ses Mosasaures, etc., se complète bientôt par ces curieux Ptérodactyles crétacés. Notre incomparable collection nationale fera, alors plus que jamais, envie à tous les pays civilisés.

On trouvera cette conférence dans la *Revue des questions scientifiques*, livraisons de juillet et d'octobre 1889.

IV

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU VENDREDI 3 MAI 1889.

La conférence de ce jour, *Sur le sens des mouvements de l'écorce terrestre,* a été faite par M. Albert de Lapparent, professeur à l'Institut catholique de Paris.

L'écorce terrestre porte la trace incontestable de mouvements survenus à diverses époques, et qui ont périodiquement troublé son équilibre, en dérangeant les strates sédimentaires de leur position, primitivement horizontale. Au début de ce siècle, on attribuait généralement ces mouvements à des impulsions verticales, de nature volcanique. Mais peu à peu on a dû reconnaître qu'aucun des volcans actuels n'avait soulevé les terrains avoisinants, et la doctrine des impulsions verticales a fait place à celle de la compression latérale de l'écorce, obligée de se plisser pour rester appuyée sur un noyau qui se contracte en perdant sa chaleur.

Récemment, une nouvelle école, dont le chef est M. Suess, le savant professeur de Vienne, a cherché à amoindrir considérablement le rôle des effets de plissement, en faisant prévaloir cette idée que, dans la formation du relief terrestre, le facteur principal, sinon unique, était l'effondrement en masse de compartiments, limités par des cassures et glissant, sous le seul effort de la pesanteur, le long de *môles* ou de *piliers,* relativement immobiles.

M. de Lapparent s'attache à démontrer que cette conception nouvelle, dans l'application qu'en font ses auteurs à l'histoire géologique de l'Europe et de l'Amérique, est inconciliable avec un fait très caractéristique, qui est la permanence presque absolue que présente, en certains points, le niveau de la mer à des époques très différentes. L'Ardenne, le Cotentin et la Provence méritent surtout d'être cités à ce point de vue. Dans les deux premiers pays, sur la tranche des schistes anciens, fortement redressés, on observe de véritables flaques sédimen-

taires, éparpillées çà et là à des altitudes peu considérables, et dont les unes datent du début des temps jurassiques, tandis que d'autres sont crétacées, d'autres éocènes et les dernières même pliocènes. Or, une telle permanence du niveau des mers est incompatible avec l'idée des effondrements. Car il faudrait, d'une part, que ceux-ci eussent affecté simultanément des régions d'une étendue immense, pour ne laisser en saillie que d'insignifiants piliers; d'autre part, que les mouvements de l'écorce et ceux de la mer qu'elle supporte eussent été parfaitement concordants, ce qui dépasse la mesure des probabilités admissibles.

Abordant ensuite la question au point de vue théorique, M. de Lapparent montre que la sphère terrestre, par l'effet naturel de son refroidissement, se divise en trois zones : un noyau énorme, qui n'éprouve que des variations insensibles; une première enveloppe qui, se refroidissant plus vite que le noyau, doit être dans un état de tension propre à y faire naître, si elle est solide, des fentes par où s'injecteront les matières fondues; enfin une couche externe, qui se refroidit moins vite que son substratum et demeure, par suite, dans un état constant de compression. Cette zone, dont l'épaisseur, d'après les calculs des savants anglais, est vraisemblablement comprise entre 5 et 25 kilomètres, embrasse, en tout cas, la totalité de ce qui est accessible à l'observation directe. Le phénomène de compression est donc seul à l'œuvre dans la portion visible de l'écorce; et si déjà, au point de vue mécanique, la coexistence, dans cette partie, de régions comprimées et d'autres distendues pouvait, à bon droit, paraître inadmissible, elle le devient bien davantage en présence de ces considérations qui, pour être d'ordre théorique, n'en ont pas moins la plus grande valeur.

En résumé, le phénomène orogénique consiste en un état de compression latérale, qui fait naître des plis dans les parties les plus souples de l'écorce, des fractures dans les régions plus cristallines ou plus anciennement consolidées; et, quand les effondrements se produisent, c'est toujours, soit par la chute de la clef d'une voûte rompue, qui occupait l'axe du soulèvement, soit par la transformation d'un pli brusque en fracture, avec

écroulement de l'une des deux lèvres. L'étude géologique des effondrements linéaires de la vallée du Rhin, de la mer Morte et de la mer Rouge confirme ces conclusions.

Cette conférence a été publiée dans la *Revue des questions scientifiques*, livraison de janvier 1890, sous le titre : *La nature des mouvements de l'écorce terrestre.*

V

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU SAMEDI 4 MAI 1889.

Les deux commissaires nommés dans l'assemblée générale du jeudi 2 mai, MM. Lagasse et Otto, proposent d'approuver les comptes du trésorier. Cette proposition est adoptée.

M. Aimé Witz, professeur aux Facultés catholiques de Lille, fait une conférence sur *Les victimes de l'électricité.*

M. Witz fait une étude complète des accidents produits par l'électricité : les victimes de l'électricité sont nombreuses, puisqu'en France 1102 personnes ont été tuées par la foudre, de 1868 à 1876, et que les hauts voltages adoptés par l'industrie ont déjà coûté la vie à plus de 800 individus en vingt ans, en Europe et en Amérique. La fulguration par le feu du ciel et par les courants présente assurément de grandes différences, mais on y trouve aussi de curieuses analogies, qui permettent d'étudier un phénomène par l'autre : c'est ce que M. Witz se propose de faire.

La foudre produit des actions mécaniques, calorifiques et chimiques bien connues, mais dont le caractère particulier est d'être extraordinairement capricieuses : les chroniques de l'électricité en renferment d'étonnants exemples. On les expliquera en constatant que la loi de Ohm ne s'applique pas aux courants de haute tension, quand on les considère dans leur période variable de propagation.

Les causes de mort dans la sidération sont quelquefois de graves lésions, mais souvent aussi on n'observe aucune blessure mortelle, et il faut recourir à l'autopsie pour expliquer l'issue fatale de l'accident : or, l'engourdissement tétanique, l'épuisement de l'excitabilité musculaire ou une congestion cérébrale et pulmonaire sont des effets ordinaires de l'étincelle, ainsi qu'on peut le démontrer par des expériences de laboratoire ; l'arrêt du cœur et l'asphyxie en sont les conséquences.

Les courants agissent tout autrement, en apparence, que les décharges effectuées sous le régime de centaines de mille volts : ici plus de caprice, mais une effrayante uniformité. C'est l'énergie du courant qui assomme sa victime ; M. Witz fait ressortir avec soin ce caractère des phénomènes électriques. L'action physiologique du courant est très comparable néanmoins à celle de l'étincelle ; dans ce cas, on observe aussi l'engourdissement tétanique, l'arrêt du cœur et l'asphyxie consécutive.

Une étude approfondie des accidents permet de formuler quelques règles de prudence et de préservation, en même temps qu'elle conduit à certaines pratiques de salut, par lesquelles on ranime ceux qui n'ont pas été tués sur le coup. Une intervention rapide et active peut arracher à la mort une victime qui serait perdue si l'on ne venait pas à son secours ; il ne faut jamais désespérer, car la vie persiste dans un corps en apparence inanimé ; qu'on cherche bien vite le prêtre et qu'on fasse venir le médecin ; mais en attendant l'arrivée de l'homme de l'art, que l'on essaie de ranimer le malheureux frappé par la foudre, surtout en pratiquant la respiration artificielle.

Ces conclusions et ces conseils pratiques sont de la plus haute importance ; on se joue aujourd'hui avec des intensités de 20,000 ampères et des tensions de 10,000 volts : il est bon que tout le monde connaisse les dangers de cet état de choses et apprenne à s'en garder. L'électricité n'est pas plus dangereuse qu'un engrenage, mais il ne faut pas y toucher : en cette matière, la crainte est le commencement de la sagesse.

La *Revue des questions scientifiques* a reproduit cette conférence dans la livraison de juillet 1889.

Le R. P. George, faisant fonction de secrétaire, lit au nom du Conseil la déclaration suivante :

Conformément au règlement arrêté par la Société scientifique de Bruxelles pour l'encouragement des recherches scientifiques, le conseil de la Société, sur l'avis des rapporteurs, MM. Alphonse Proost, Anatole Buisseret et Raymond Storms, a couronné le mémoire de M. l'abbé Gérard Smets, docteur en sciences naturelles, professeur au collège épiscopal de Hasselt, et lui décerne un prix de 500 francs et une médaille pour sa réponse à la question proposée par la troisième section de la Société : *Étudier et discuter les diverses classifications qui ont été proposées pour l'ordre des Chéloniens.*

M. le Président proclame ensuite le résultat des élections (voir, page 39, la composition du Bureau et du Conseil), et déclare la session close.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

La barbarie africaine et l'action civilisatrice des missions catholiques au Congo et dans l'Afrique équatoriale, par Alexis M.-G. — Liége, 1889.

Stanley l'Africain, sa jeunesse, ses quatre grandes expéditions dans le continent noir, par Alexis M.-G. — Liége-Alost, 1890.

La traite des Nègres et la croisade africaine, par Alexis M.-G. — Liége, 1889.

Dios y el Cosmos, ó sea El ateismo materialista ante las ciencias experimentales, por D. Miguel Amer, licenciado en medicina y cirujia. Parte primera. — Palma, 1889.

Anuario del observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1890, formado bajo la direccion del ingeniero Angel Anguiano. Año X. — México, 1889.

Étude sur François Bacon, suivie du Rapport à l'Académie des sciences morales et politiques sur le concours ouvert pour le prix Bordin, par J. Barthélemy-Saint-Hilaire. — Paris, 1890.

Bibliothèque de philosophie contemporaine. La philosophie dans ses rapports avec les sciences et la religion, par J. Barthélemy-Saint-Hilaire. — Paris, 1889.

Publications du *Progrès médical*. Guide médical à l'Exposition universelle internationale de 1889 à Paris, par Marcel Baudouin, 2e fascicule. — Paris, 1889.

Principii fondamentali della termodinamica, e loro principali applicazioni alla fisica, alla chimica, alla fisiologia et all' astronomia, per Luigi Berzieri. — Venezia, 1885.

Prince Roland Bonaparte. Le glacier de l'Aletsch et le lac de Märjelen. — Paris, 1890.

Prince Roland Bonaparte. Le premier établissement des Néerlandais à Maurice. — Paris, 1890.

Le Globe, journal géographique, organe de la Société géographique de Genève. Tome XXVIII, 4e série, tome VIII. Bulletin. La Laponie et la Corse, résumé de la conférence du prince Roland Bonaparte (séance du 25 janvier 1889). — Genève, 1889.

Les stations zoologiques des bords de la mer, par A. Buisseret. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques,* janvier-avril 1889.) — Bruxelles, 1889.

La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi, per Bellino Carrara.— Torino, 1889.

Giovanni Maria Cornoldi S. J. — Quale secondo S. Tommaso sia la concordia della mozione divina colla libertà umana. Terza edizione. — Roma, 1890.

Les Chaldéens jusqu'à la formation de l'empire de Nabuchodonosor, précédé de considérations sur un récent livre de M. Hugo Winckler, par A.-J. Delattre, S. J. — Louvain, 1889.

Compte rendu de la session extraordinaire de la Société géologique de Belgique à Spa, en 1886, par G. Dewalque. (Extrait des *Annales de la Société géologique de Belgique.*) — Liége, 1888.

Sur une faune paléocène de Copenhague, par A. von Koenen. Compte rendu par M. G. Dewalque. Item.

Sur quelques dépôts tertiaires des environs de Spa, par G. Dewalque. It.

Le prétendu dolmen de Solwaster, par G. Dewalque. It.

Le trou du Pouhon à La Reid, par G. Dewalque. It.

La Constitution de l'espace céleste d'après M. Hirn et d'après la théorie atomique moderne; exposé sommaire par Jean d'Estienne, suivi d'une Note bibliographique. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques.*)

Revue des questions scientifiques, par Jean d'Estienne. (Extrait de la *Revue du Monde catholique* du 1er juillet 1889.)

Les Questions scientifiques, par Jean d'Estienne. (Extrait de la *Revue du Monde catholique*, nov. 1889 et mai 1890.)

Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique, par F. Folie. — Bruxelles, 1890.

Académie royale de médecine de Belgique. De la dégénérescence ascendante secondaire du faisceau de Gowers, par le Dr X. Francotte. — Bruxelles, 1889.

Le Génie et la Folie, par X. Francotte, professeur à l'Université de Liége. (Extrait de la *Revue générale.*) — Bruxelles, 1890.

Guide pratique de l'analyse des urines, par S. Laache. Traduit de l'allemand par X. Francotte. Seconde édition française. — Bruxelles, 1889.

Laboratoire de pathologie générale. Régénération fonctionnelle, après section de la moelle, par le Dr X. Francotte. — Liége, 1889.

Application de nouveaux instruments de précision (cercle chromatique, rapporteur et triple décimètre esthétiques) à l'archéologie, par M. Charles Henry. (Extrait de la *Revue archéologique.*) — Paris, 1890.

Cercle chromatique de M. Charles Henry. — Paris, 1888.

Sur la dynamogénie et l'inhibition, par M. Charles Henry. — Sur un cercle chromatique, un rapporteur et un triple décimètre esthétiques, par M. Charles Henry.

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Paris, 1889. M. Charles Henry. Loi générale des réactions psycho-motrices. — Paris.

Sur le principe et la graduation d'un thermomètre physiologique, par M. Charles Henry. (Extrait des *Comptes rendus des séances de la Société de biologie.*) — Paris, 1890.

Rapporteur esthétique de M. Charles Henry. — Paris, 1888.

Bibliographie générale de l'astronomie, par J. C. Houzeau et A. Lancaster. Tome I[er], seconde partie. — Bruxelles, octobre 1889.

Descartes et son œuvre posthume « De solidorum elementis », par M. de Jonquières. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.*) — Paris.

Note sur un Mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes : « De solidorum elementis », la traduction et le commentaire de cet ouvrage, par M. de Jonquières. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.*) — Paris.

Évolution et transformisme. Des origines de l'état sauvage. Étude d'anthropologie, par le D[r] P. Jousset. Ouvrage précédé d'une lettre du T. R. P. Monsabré, des Frères Prêcheurs. — Paris, 1889.

Le Père Carbonnelle et son œuvre, par C. de Kirwan.

Quelques mots sur l'habitation ouvrière, par Ch. Lagasse. — Paris-Bruxelles, 1889. (Extrait de la *Revue générale.*)

Assemblée générale des œuvres catholiques de l'archidiocèse de Malines. Troisième section. Séance du mardi 30 avril 1889. Sociétés coopératives. Discours de M. Ch. Lagasse.

Notes biographiques sur J.-C. Houzeau, par A. Lancaster. — Bruxelles, 1889.

Le climat de la Belgique en 1889, par A. Lancaster. — Bruxelles, 1890.

Les étoiles filantes et les aérolithes, par A. de Lapparent. (Extrait du *Correspondant.*) — Paris, 1889.

La question du charbon de terre, par Albert de Lapparent. — Paris, 1890.

A propos de la nouvelle organisation des services de la carte géologique, par Th. Lefèvre. (Extrait du *Bulletin des séances* de ladite Société.) — Bruxelles, 1890.

L'Égypte au temps des Pharaons, par Victor Loret. — Paris, 1889.

Sull' origine e fondazione di Roma. Parte II[a]. Dissertazione dell' avv. Gio. Batt. Lugari, letta all' Accademia pontificia di archeologia, il 24 aprile 1890. — Roma, 1890.

Bibliothèque scientifique contemporaine. Hypnostisme expérimental. Les émotions dans l'état d'hypnotisme et l'action à distance des substances médicamenteuses ou toxiques, par J. Luys. — Paris, 1890.

Étude relative à l'action de la chaleur sur les parois des chaudières, par M. de Maupeou, ingénieur de la marine. (Extrait du *Mémorial du Génie maritime.*)

Notes bibliographiques sur les habitations ouvrières et sur le grisou, extraites du *Catalogue idéologique,* par F. Nizet. — Bruxelles, 1889.

Calcul direct des termes d'une réduite de rang quelconque d'une fraction continue périodique, par M. M. d'Ocagne. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.*)

Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales, par M. Maurice d'Ocagne. (Extracto do *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes,* nº XLVIII.) — Lisboa, 1888.

Formules nouvelles pour résoudre le problème de la carte au moyen de données particulières, par M. d'Ocagne. (Extrait de la *Revue maritime et coloniale,* février 1889.)

Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques,* 3e série, tome VII, septembre 1888.)

Quelques propriétés de l'ellipse, déviation, écart normal, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques,* 3e série, tome VII, juin 1888.)

Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1887, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques,* 3e série, tome VII, octobre 1888.)

Note sur le tracé de l'axe longitudinal des voûtes, par M. d'Ocagne. (Extrait des *Annales des ponts et chaussées.*)

Sur le tracé de l'intrados des voûtes elliptiques, par M. d'Ocagne. (Extrait des *Annales des ponts et chaussées.*)

Note sur le tracé des paraboles des moments fléchissants, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Annales des ponts et chaussées.*)

A propos de l'unification des heures, par Ernest Pasquier. (Extrait des *Mémoires de l'Union des ingénieurs de Louvain.*) — Bruxelles-Louvain, 1889.

Encore le système des fuseaux horaires, par Ernest Pasquier. (Extrait des *Mémoires de l'Union des ingénieurs de Louvain.*) — Bruxelles-Louvain, 1890.

De l'unification des heures dans le service des chemins de fer, par Ernest Pasquier. (Extrait des *Mémoires de l'Union des ingénieurs de Louvain,* 1889). — Bruxelles-Louvain, 1889.

Le « temps universel » dans le système des fuseaux horaires, par E. P. (Extrait de *Ciel et Terre,* 1er mai 1890.)

Les microbes et la vie, hygiène et agriculture, par A. Proost, 2e édition. — Paris-Louvain, 1890.

Commission météorologique de la Gironde. Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde, de juin 1885 à mai 1886, de juin 1887 à mai 1888, et de juin 1888 à mai 1889. Notes de M. G. Rayet. (Appendices aux tomes II, IV et V, 3e série, des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.*) — Bordeaux, 1886, 1888 et 1889.

Bibliothèque de la Revue de l'aéronautique. Les piles légères (piles chlorochromiques) du ballon dirigeable « La France », par le commandant Renard. — Paris, 1890.

Asiatische Handlungscompagnien Friedrichs des Grossen, von Viktor Ring. — Berlin, 1890.

Du transformisme et de la génération spontanée, par Ch.-A. Rohaut, précédé d'une préface du Dr Michel Peter. — Paris, 1890.

Estudio de la filosofia y riqueza de la lengua mexicana, por el presb. Agustin de la Rosa. — Guadalaxara, 1889.

Revue internationale de bibliographie médicale, pharmaceutique et vétérinaire, dirigée par le Dr Jules Rouvier. Vol. I, n° 2, 25 juin 1890. — Paris-Beyrouth.

Identité de la dengue et de la grippe-influenza, par le Dr Jules Rouvier. — Paris-Beyrouth.

The Actual State of the Standard Time Question, par le Dr Robert Schram. (Extrait de *Observatory,* April 1890.)

Ueber das Stundenzonen-System der amerikanischen Eisenbahnen, von Dr R. Schram. (Auszug aus einem Vortrage, gehalten im wissenschaftlichen Club am 16. December 1889.)

La zona oraria del Adriatico, del Dr Roberto Schram. (Extrait de *Osservatore Triestino.*) — Trieste, 1890.

L'hygiène alimentaire dans la thérapeutique des maladies, par le docteur Fr. Scohy. — Paris-Louvain, 1890.

La fable des Jumarts, par André Suchetet. (Extrait des *Mémoires de la Société zoologique de France* pour l'année 1889.) — Paris, 1889.

Note sur les hybrides des Anatidés, par André Suchetet. — Rouen, 1888.

La philosophie de Gassendi, par P.-Félix Thomas. — Paris, 1889.

Researches on the Electrical Resistance of Bismuth, by Edmond Van Aubel. (From the *Philosophical Magazine* for october 1889.)

Annexe au Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie (Bruxelles). Les origines du bassin de l'Escaut, par Eugène van Overloop. — Bruxelles, 1890.

Leçons élémentaires de physique, par Victor Van Tricht, S. J.—Namur, 1890.

L'Esclave des esclaves. Causerie par Victor Van Tricht, S. J. — Namur, 1889.

Le luxe. Causerie par Victor Van Tricht, S. J. — Namur, 1889.

En Afrique. Causerie par Van Tricht, S. J. — Namur, 1889.

A l'usine. Causerie par Victor Van Tricht, S. J. — Gand, 1889.

Le XIXe siècle. Causerie par Victor Van Tricht. — Bruges, 1889.

Cours d'algèbre élémentaire, par l'abbé F. Verhelst. Tome premier : Le calcul algébrique; les équations du premier degré. — Bruxelles, 1890.

Fondamenti della teoria dei tipi ordinati, di Giulio Vivanti a Mantova. (Estratto dagli *Annali di Matematica pura ed applicata,* Serie II^a, tomo XVII°). — Milano, 1889.

Exploration des champs magnétiques par les tubes à gaz raréfiés, par M. A. Witz. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.*) — Paris, 1890.

Des inversions de polarité dans les machines série-dynamos, par M. A. Witz. — Juin 1889.

Hoëné Wronski. Loi téléologique du hasard. Réimpression de trois pièces rarissimes (1833), précédée d'une autobiographie et d'un inventaire de l'œuvre. — Paris, 1890.

Académie royale de médecine de Belgique. Monument J.-B. Van Helmont. — Bruxelles, 1889.

Anales del Ministerio de Fomento de la Republica Mexicana. Tome VIII. — México, 1887.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XIII, 2e livr.; tome XIV, 2e livr.; tome XV, 2e et 3e livr.; tome XVI, 1re livr.; tome XVII, 1re et 2e livr. — Liége, 1888-1890.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. Tome XXIII (quatrième série, tome III.) Année 1888. — Bruxelles.

Annual Report of the Board of regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures and condition of the Institution to July, 1885. Part II. — Washington, 1886.

Item for the year ending June 30, 1886. Part I. — Washington, 1889.

Annuario publicado pelo imperial observatorio de Rio de Janeiro para o anno de 1885. — Idem para o anno 1886. — Idem para o anno 1887, terceiro anno.

L'Anthropologie, paraissant tous les deux mois, sous la direction de MM. Cartailhac, Hamy, Topinard. 1890. Tome I. N°s 1, 2, 3. — Paris.

El Ateneo, revista cientifica, literaria y artistica, organo de El Ateneo Balear. Año I, núm. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. — Palma de Mallorca.

Atti della R. Accademia dei Lincei anno CCLXXXIII 1886. Serie quarta. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume III. — Roma, 1886. — Item, anno CCLXXXIV 1887. Volume IV. — Roma, 1887.

Boletin mensual del Observatorio meteorológico-magnetico central de México. Tomo I, año de 1888. Tomo II, año de 1889. — Mexico.

Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettine delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Volume III, 1888. Indice alfabetico. — Volume IV, nº 3. Maggio-Giugno, 1889. — Roma.

Boletin de minas, industria y construcciones, publicado por la Escuela especial de ingenieros. Año VI, núm. 1-5. — Lima, 1890.

Bulletin of the California Academy of Sciences, nºˢ 1, 2, 3 et vol. 2, nº 8. — San Francisco.

Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie (Bruxelles). Tome Iᵉʳ, année 1887. Tome II, année 1888. Tome III, année 1889, fascicules I, II, IV, V, VI et VII. — Bruxelles.

Catalogue of the Pacific Coast Fungi, by H.-W. Harkness, M. D., and Justin P. Moore, A.-M. Read before the California Academy of Sciences, Feb. 2ᵈ, 1890.

Ministère du Commerce, de l'Industrie et des Colonies. Exposition universelle internationale de 1889. Direction générale de l'exploitation. Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques, tenu à Paris du 16 au 19 juillet 1889. Procès-verbal sommaire. — Paris, 1889.

La Education. Año IV, nº 84. — Buenos Aires, 1889.

La España moderna. Avril, mai, juin. — Madrid.

Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, anlässlich ihres 200 jährigen Jubelfestes 1890. Erster Teil. — Leipzig, 1890.

Estados Unidos Mexicanos. Secretaría de Fomento Seccion 4ª. Informes y documentos á comercio interior y exterior, agricultura, y industrias. Numeros 55-56, enero-febrero 1890. — México, 1890.

Journal de l'École polytechnique, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. 57ᵉ, 58ᵉ et 59ᵉ cahiers. — Paris, 1887 et 1889.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome II, 2ᵉ cahier. Tome III, 1ᵉʳ cahier. — Paris-Bordeaux, 1886.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 3ᵉ série. Tome IV. Tome V, 1ᵉʳ cahier. — Paris-Bordeaux, 1888 et 1889.

La Mission belge du Bengale occidental. — Bruxelles, 1890.

Den Norske Nordhavs-Expedition, 1876-1878. XIX. Zoologi. Actinida, ved D. C. Danielssen. — Christiania, 1890.

Observationes magnéticas y meteorológicas del real Colegio de Belen de la Compañía de Jesús en la Habana. 1ᵉʳ semestre, Enero-Junio; 2ᵉ semestre. Julio-Diciembre, 1887. — Habana, 1889.

Observatorio meteorológico de Manila, bajo la dirección de los PP. de la Compañia de Jesús. Observationes magnéticas verificadas por el P. Martín Juan en la Paragua, Joló y Mindanao. Año 1888. — Manila, 1890.

Observatorio meteorológico-magnético central de México. Boletin mensual. Tomo I, num. 11-12, con suplemento, y resumen del año de 1888. Tomo II, num. 1-9.

Proceedings of the California Academy of Sciences. Vol. V, part I, II, III; vol. VI; vol. VII, part I. Second series, vol. I, part I, II; vol. II. — San-Francisco, 1873-1890.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, sessions 1883-84, 1884-85, 1885-86, 1886-87.

Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique. Tome XVII, fin. Tome XVIII, 1re partie. — Bruxelles.

Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. Geodätische Arbeiten. Heft VI; Heft VII. — Christiania, 1888-1890.

Reports from the Laborabory of the Royal College of Physicians, Edinburgh. Vol. II. — Edinburgh and London, 1890.

Revista tecnológico industrial. Año XI, num. 9, 10, 11, 12; año XII, num. 1-10. — Barcelona.

Revue de l'aéronautique théorique et appliquée, publication trimestrielle illustrée. 2e année, 1889, 2e, 3e et 4e livraisons. 3e année, 1890, 1re et 2e livraisons. — Paris, 1889 et 1890.

Revue de la science nouvelle, nos 15, 16, 17, 18, 19, 21. — Paris, 1889.

Transaction ofthe Royal Society of Edinburgh. Vol. XXX, part IV; vol. XXXI; vol. XXXII, part II, III, IV; vol. XXXIII, part I, II.

L'Université catholique, antérieurement « La Controverse et le Contemporain ». — Mai 1889 à juillet 1890.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. 6 Heft. — 1888.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

LES CLASSIFICATIONS DES CHÉLONIENS (1)

PAR

l'abbé Gérard Smets

Docteur en sciences naturelles,
Professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

> In tracing a natural system the human mind is only translating into human language the divine thoughts expressed in nature in living realities. Agassiz.

I. *Fondements des classifications.*

Quand l'homme « s'efforce d'acquérir la connaissance d'objets naturels, il se trouve obligé d'employer des moyens particuliers pour mettre de l'ordre parmi les objets infiniment nombreux et variés qu'il considère, pour distinguer, sans confusion, les groupes de ces objets entre eux et chacun de ces derniers en particulier, pour communiquer et transmettre à ses semblables ce qu'il a appris, remarqué et pensé à leur égard » (2), pour faire ressortir l'enchaînement de ces êtres, les relations qu'ils présentent entre eux, le plan qui a présidé à leur développement. De là découlent l'utilité et la nécessité des classifications.

(1) Mémoire couronné en réponse à la troisième question mise au concours par la Société scientifique de Bruxelles.

Ce mémoire a été présenté au mois de septembre 1888; depuis lors MM. Baur, Boulenger, Lydekker, etc., ont publié de nouvelles notices sur la classification des tortues. L'auteur a profité de ces publications pour compléter son mémoire. Les passages ajoutés sont placés entre crochets (mai 15, 1889).

(2) Lamark, *Philosophie zoologique*, t. I, p. 37. Nouvelle édition, 1873.



Quand on veut classer les êtres organisés, on peut suivre des voies bien différentes, suivant que l'on poursuit l'une ou l'autre, ou la totalité des fins des classifications.

1. On choisit un caractère quelconque, et l'on poursuit les variations qu'il peut subir dans les diverses espèces. Cette classification sera laissée aux caprices des zoologistes ; il n'y en aura pas d'autres possibles tant qu'on ne connait pas suffisamment l'anatomie de la plupart des représentants d'un groupe. Telle serait la classification des Chéloniens basée sur le caractère de l'entoplastron :

Entoplastron absent	*Cinosternon*. *Dermochelys*. *Dithyrosternon*, etc.
Entoplastron en forme de croix, avec une barre médiane	*Testudo* *Emys* *Chelys* *Chelone*, etc.
Entoplastron arrondi, sans barre médiane.	*Trionyx*. *Amyda*. *Cycloderma*, etc

Ces classifications se répartissent en deux groupes : Dans les unes, on prend tout à fait arbitrairement un caractère dont les variations ne sont guère accompagnées d'autres modifications dans l'être organisé; elles peuvent juxtaposer des êtres totalement différents; elles ne servent guère qu'à trouver le nom de l'animal, à la manière des tables dichotomiques à l'usage des botanistes commençants. Telle serait la classification précédente des Chéloniens, et telle paraît, au premier abord, la classification des mêmes animaux proposée par Seeley [1], basée sur la nature de l'épiderme.

Dans les autres, on prend pour base un caractère dont les variations entraînent généralement des modifications correspondantes plus nombreuses dans l'être organisé; ces classifications permettent de trouver non seulement le nom d'un animal, la

---

[1] Seeley, *Note on Psephophorus polygonus*. Quaterly Journal of the Geological Society, August, 1880, p. 412.

présence ou l'absence d'un seul caractère, mais elles font connaître parfois quelques autres détails de l'organisation. Telles sont, par exemple, les classifications basées sur la nature des extrémités des tortues, dénotant le régime de l'animal. On avait cru longtemps que le genre de vie tenait à quelque chose d'essentiel dans l'organisation d'un animal; nous savons aujourd'hui que c'est une erreur, que de plus des animaux peuvent, par adaptation, posséder des caractères communs, d'une importance capitale en apparence, et cependant être construits d'après un type tout autre. N'a-t-on pas laissé longtemps dans une même famille, voire dans un même genre, le *Dermochelys* et les *Chelone*, parce que leurs extrémités sont transformées en nageoires?

2. On peut aussi considérer (1) l'ensemble de l'organisation des animaux et les rapprocher suivant la somme de leurs affinités. Dans ce cas, la place qu'occupe un animal dans la série révèle son nom et l'ensemble de sa structure. Cette classification est donc en quelque sorte le résumé ou la généralisation des connaissances qu'on a pu acquérir sur l'organisation des animaux.

Ces sortes de classifications sont difficilement et très rarement réalisables, parce que les caractères sont changeants dans un même groupe incontestablement naturel et un, et parce que des caractères, en apparence complètement caractéristiques d'un groupe, apparaissent parfois atavistiquement ou exceptionnellement dans quelque représentant d'un autre groupe totalement différent du premier.

« Mais même, ajoute Carleer (2), en envisageant tous les caractères dans leur ensemble, une classification pourra encore conserver le caractère artificiel. Adanson avait imaginé, pour grouper les végétaux en familles, de rassembler les plantes qui se ressemblent par le plus grand nombre de caractères : l'expérience prouva qu'il arriva ainsi à des rapprochements fort peu naturels et qu'il éloigna au contraire des espèces qui avaient

(1) CARLEER, *Examen des principales classifications adoptées par les zoologistes*. Bruxelles, 1864, p. 91.

(2) CARLEER, *Op. cit.*, p. 91.

entre elles les plus grandes affinités ; sa classification n'était en effet qu'une somme de groupements artificiels et ne pouvait par conséquent être basée sur la nature. »

3. Il fallait par conséquent prendre un autre guide et abandonner la voie précédente. Appuyés sur le principe de la subordination des caractères, les naturalistes furent amenés à envisager principalement ce que l'on appelait des caractères dominateurs : « Si l'on examine les ressemblances que peuvent offrir entre elles les différentes espèces du règne animal ou du règne végétal, on s'assure aisément que tantôt elles s'appuient sur des caractères extrêmement changeants, et dont les variations ne paraissent guère occasionner une perturbation notable dans la structure générale de l'organisme, tantôt, au contraire, ces mêmes ressemblances sont tirées d'organes d'une constance remarquable, et qui ne changent que lorsque la composition et la disposition de la plupart des appareils viennent elles-mêmes à varier. Il est évident qu'une seule ressemblance de ce genre doit avoir la même valeur que la réunion de plusieurs autres basées sur des caractères moins prédominants, et par conséquent que tous les caractères que peuvent présenter les animaux ou les végétaux sont loin d'offrir la même importance. Une classification naturelle ne peut donc pas se baser sur la somme, mais sur la valeur des affinités. »

Quelque séduisants que paraissent ces principes et ces raisonnements, on ne peut s'empêcher de constater que des auteurs éminents, prétendant suivre cette voie, sont arrivés à des résultats bien différents. Tel naturaliste donne la préférence à tel caractère pour des motifs plausibles, tel autre la donne à un autre caractère pour des motifs aussi convaincants. De plus, dans l'organisme, tout est solidaire, tout se tient : n'y a-t-il pas souvent *petitio principii* dans l'évaluation des caractères ?

Les classifications varieront suivant la manière d'envisager les faits naturels et l'état de nos connaissances, et c'est en ce sens que Gœthe [1] disait que l'expression de *système naturel* est une expression contradictoire.

---

(1) Gœthe, in Claus, *Traité de zoologie*, 1884, p. 13.

En somme, ces classifications n'ont qu'une valeur « objective » très restreinte, et il est d'ordinaire très difficile de leur assigner une place, soit parmi les systèmes artificiels, soit parmi les naturels; elles sont plutôt mixtes.

L'embryologie d'ailleurs a montré combien les caractères des animaux adultes sont parfois trompeurs pour la systématique.

4. Il manquait, par conséquent, un criterium certain donnant à une classification une valeur réelle, objective, telle que les classifications ne fussent plus soumises à l'arbitraire des naturalistes. Issu de l'étude de la paléontologie, de l'embryologie et de la théorie évolutionniste, un nouveau criterium est appliqué depuis quelques années et, on ne saurait le méconnaître, depuis lors la classification a fait plus de progrès que depuis le commencement de la systématique. De plus, l'étude attentive de la nature a révélé, ce que l'on se refusait à croire, que le règne animal ne se représente pas par une ligne droite, mais plutôt par un arbre ou plusieurs arbres, véritables arbres généalogiques, aux ramifications et aux sous-ramifications nombreuses.

Avant d'exposer la base de cette nouvelle catégorie de classifications, une remarque est nécessaire : Il y a eu *évolution* dans le règne animal; c'est-à-dire que, depuis l'époque de l'apparition des premiers animaux, les formes animales apparues dans la suite sont reliées aux anciennes, de manière à former une chaine ininterrompue et graduée. Ces modifications de la faune se sont faites non pas au hasard, mais d'après un plan dont la science est parfois parvenue à saisir les trames. Cette transformation ou cette *évolution* est admise par tous les naturalistes, parce qu'elle est le corollaire de faits dûment constatés. Tout le monde admet la série classique commençant à l'*Hyracotherium*, passant par *Pliolophus*, *Anchilophus*, *Mesohippus*, *Anchiterium*, *Hipparion*, pour aboutir à notre *Equus*. Ces séries sont très nombreuses aujourd'hui.

L'hypothèse transformiste soutient que cette évolution s'est faite par modification, transformation des formes préexistantes ; d'autres, surtout des philosophes, nient cette hypothèse.

Y a-t-il eu transformation réelle des espèces? y a-t-il eu une

autre cause efficiente de l'évolution? Il ne nous appartient pas, dans ce mémoire, de défendre l'une ou l'autre de ces hypothèses. Nous nous contenterons de tenir compte des faits positivement acquis.

Parce que l'hypothèse transformiste est admise par le plus grand nombre des naturalistes, la terminologie admise (ancêtres, descendance, souche, etc.) préjuge la question de savoir comment l'évolution s'est faite; mais au fond ces termes, sous une forme hypothétique, expriment une théorie vraie et des faits constatés.

Cette considération met à néant l'objection faite contre les classifications appuyées sur l'*évolution*, prétendant que ces dernières sont hypothétiques comme la théorie transformiste. On ne distingue pas entre les faits positivement acquis et leur interprétation hypothétique, à savoir quelle est la cause efficiente de l'évolution. Cette confusion est générale : quand Carl Vogt (1) parle de la théorie de la convergence, il s'appuie sur des faits positifs, et transformisme et darwinisme n'ont rien de commun avec cette théorie. De même Trouessard (2) verse dans une erreur quand il dit que la théorie de la convergence est un corollaire de la théorie darwinienne.

Répétons-le, le partisan le plus convaincu des créations successives admet et doit admettre l'évolution appuyée sur les faits et telle que nous l'avons définie; il peut baser des classifications sur cette évolution; il doit admettre la théorie de la convergence, telle qu'elle ressort de l'observation, tout en admettant l'immutabilité absolue de l'espèce.

Les animaux se sont développés dans le temps et dans l'espace d'après un certain ordre, d'après un plan préconçu, et les diverses phases de l'histoire d'un groupe zoologique se voient vaguement dans le développement embryonnaire d'un représentant de ce groupe: peu importe la manière dont ce plan ait été réalisé, il existe. Les diverses étapes d'un groupe zoologique constituent le fondement pour la séparation de ce groupe en subdivisions naturelles. L'expression de ce plan sera la véritable classification,

---

(1) CARL VOGT, *Quelques hérésies darwinistes*. REVUE SCIENTIFIQUE, 16 octobre 1886, p. 481.

(2) M. TROUESSARD, *La phylogénie du cheval*. REVUE SCIENTIFIQUE, 30 octobre, 1886, p. 557.

la seule qui sera naturelle, la seule qui aura une valeur objective; elle sera, selon la belle parole d'Agassiz, la traduction, dans un langage humain, de la pensée du Créateur. Il est vrai, l'histoire des animaux offre encore tant d'inconnu; et l'embryologie, malgré ses progrès incessants, n'éclaire encore que faiblement le nouveau chemin.

Néanmoins les premiers essais faits dans cette voie nous font espérer favorablement de l'avenir, malgré les hypothèses avec lesquelles il faut encore étayer les nouvelles classifications, faute de documents.

Que l'on compare la classification proposée par Baur ([1]) pour les *Ichthyopterygia* avec les essais tentés ailleurs, on est frappé de la simplicité de cette méthode nouvelle, quand les données paléontologiques sont suffisantes.

Mais cette voie nouvelle a également ses dangers et ses écueils. Quand les faits manquent, le naturaliste y substitue des hypothèses et des raisonnements; s'appuyant sur un nombre restreint d'animaux et de faits connus, son point de départ est souvent erronné ou incomplet; il donne à certains caractères, à certaines modifications une valeur prépondérante. On établit ainsi des phylogénies, parfois très intéressantes, montrant certaines liaisons des groupes, des genres ou des espèces; mais on n'est pas certain que ces phylogénies expriment les phases d'évolution des animaux considérés.

Nous connaissons encore imparfaitement les lois qui ont présidé à l'évolution du règne animal. A ceux qui, ne s'appuyant pas sur les faits, procédaient du simple au composé dans leur arbre phylogénétique, Carl Vogt dit ([2]) : « Nous ne pouvons déduire en aucune façon les organismes compliqués des organismes simples, comme on l'a fait généralement jusqu'à présent, mais... ces organismes simples, qui souvent n'ont pas même les ébauches des organes propres aux compliqués, doivent procéder, par développement rétrograde, des organismes compli-

([1]) Baur, *On the Morphology and Origin of the Ichthyopterygia*. American Naturalist, September, 1887, p. 837.
([2]) Carl Vogt, *Op. cit.*, p. 486.

qués..... Nous ne connaissons, ni en paléontologie, ni en embryogénie, de faits qui puissent nous démontrer avec certitude l'acquisition d'organes entièrement nouveaux, tandis qu'au contraire les faits abondent, qui nous prouvent que les transformations se font comme je l'ai indiqué, et que dans les cas où nous croyons voir surgir un nouvel organe, nous rencontrons toujours au moins une ébauche préexistante, ne serait-ce qu'un simple amas de cellules sans forme déterminée..... On sera bien forcé de remanier et de renverser complètement presque tous les arbres phylogéniques qu'on nous a présentés jusqu'à présent comme le dernier mot de la science et du darwinisme en particulier. »

Le naturaliste suisse ne s'arrête pas même là, et il avance que : « Notre classification zoologique actuelle ne peut être et n'est pas, comme on le dit partout, l'expression de la parenté réelle existante entre les différents membres d'un embranchement, classe, ordre, famille ou même genre, parenté dont la démonstration serait basée sur le développement ontogénique et phylogénique, mais bien, dans beaucoup de cas au moins, le résultat d'une combinaison de caractères semblables, que nous trouvons chez des êtres provenant de souches différentes. »

Ce dernier fait est érigé en *théorie de la convergence;* mais cette convergence, qui n'atteint d'ordinaire que les caractères extérieurs, est singulièrement atténuée par Trouessard, qui dit qu'elle « est bien souvent plus apparente que réelle... qu'elle s'arrête bien avant la limite jusqu'à laquelle M. Vogt prétend la pousser. La convergence est possible pour les groupes supérieurs que nous convenons d'appeler classes ou ordres ; mais elle est déjà plus douteuse lorsqu'il s'agit de familles vraiment naturelles ; dans tous les cas, elle n'a jamais produit ce résultat de réunir et de fusionner complètement en un seul genre deux genres primitivement bien distincts. »

Mais, en admettant la convergence, elle ne peut, *à priori*, donner le caractère artificiel à une classification. Nous avons d'ailleurs les moyens de la constater et d'en tenir compte.

Aucun naturaliste, en établissant une classification, n'a la prétention d'établir un système immuable. La science est perfec-

tible, nos connaissances sont limitées ! Ce que l'on peut demander, c'est une classification qui réponde le mieux à l'état de nos connaissances actuelles.

Quand on étudie un groupe zoologique, on trouve que ces diverses classifications se sont succédées, l'une remplaçant l'autre, à mesure que la science progressait. Il en est ainsi pour l'ordre des Chéloniens.

II. *Classifications des Chéloniens.*

Historique.

Aristote.

L'antiquité classique connaissait déjà plusieurs formes de tortues. Aristote ([1]) cite χελώνη χερσαία, χελώνη θαλαττία et χελώνη ἐμύς ; non seulement il connaissait les tortues terrestres, marines et paludines, ses connaissances s'étendaient déjà sur l'organisation de ces singuliers animaux.

L'étude des tortues n'a guère fait de progrès depuis Aristote jusqu'à une époque assez récente; ces animaux n'attiraient guère l'attention des naturalistes du moyen âge. Pour Albert le Grand ([2]), la tortue était un animal du même groupe que les serpents (*reptentia*), non pas, dit-il, qu'elle soit véritablement un serpent, mais parce qu'elle ressemble à certains égards à ces animaux.

Cependant il paraît que l'on connaissait vaguement plus d'espèces que n'en indique le naturaliste et philosophe grec.

Gesner.

Le grand compilateur et savant Gesner ([3]), dans son *Histoire des animaux*, donne le tableau suivant des Chéloniens :

([1]) Aristote, *Histoire des animaux*, livre II, chap. XVII.

([2]) Albert le Grand in Gervais, article *Reptiles* du Dictionnaire d'Orbigny, 1869, p. 70.

([3]) Gesner, *Hist. anim.*, lib. IV, p. 228. Francfort, 1620; in Duméril et Bibron, *Histoire naturelle des reptiles*, tome II, p. 4.

Corollarium de Testudinibus in genere.

Testudo aut est
- terrestris
- aquatica, aut in
  - mari. . . .
    - testudo marina.
    - mus marinus.
  - aqua dulci
    - puriora, ut lacubus, amnibus.
    - cænosa, ut paludibus.

Ainsi Gesner connaissait déjà le *Dermochelys* ou *Sphargis* (1) et les tortues fluviatiles.

Linné.

Ces espèces étaient-elles mal définies, ou Linné ignorait-il la littérature des Chéloniens ?

En effet, dans la première édition de son *Systema naturæ* (Lugduni Batavorum, 1735), le naturaliste suédois ne reconnaît, dans son unique genre *Testudo*, que quatre espèces (*T. tessulata, terrestris, marina, lutaria.*)

Dans les éditions subséquentes, Linné subdivise l'unique genre *Testudo* en trois sous-genres :

1° *Testudines marinæ*, pedibus pinniformibus;
2° — *fluviatiles*, pedibus palmatis;
3° — *terrestres*, pedibus clavatis.

Linné donnait au terme *genre* une signification plus étendue que les naturalistes modernes. Ses genres correspondaient parfois à nos familles ou même à nos ordres, comme c'est le cas pour les Chéloniens.

Pour établir les grandes divisions du règne animal, aussi bien que pour les sous-divisions, quand c'était possible, Linné tenait compte du genre de vie, mais il les fondait sur des dispositions anatomiques, tirées ici de la nature des extrémités.

---

(1) Rondelet, le premier, en 1554, dans son ouvrage *de Piscibus*, décrivit un *Sphargis* de la Méditerranée sous le nom de *Testudo coriacea* sive *Mercurii*.

Klein (1).

Klein, l'émule et le critique de Linné, divisait en deux groupes seulement les espèces du genre *Testudo*, qu'il désignait sous le nom collectif de *Testudinata* (2).

1° *Testudines*, digitis discretis;
2° — pedibus digitisve anomalis.

La classification de Linné, prétend Klein, tirée de la différence des lieux que les tortues habitent, ne laisse pas d'avoir son incommodité et de causer de l'amphibologie. Il est plus sûr, ajoute-t-il, de les diviser en tortues qui ont les doigts séparés et en celles qui ont les doigts et les membres irréguliers, ce sont les tortues marines.

L'une et l'autre de ces deux classifications primitives reparaissent dans la suite, avec quelques légères augmentations et quelques modifications de la diagnose.

Gmelin.

Dans la 13e édition du *Systema naturæ*, 1788, Gmelin suit la classification de Linné. Il divise l'unique genre *Testudo* en trois sections qu'il caractérise comme suit :

1° *Les tortues marines*, qui ont leurs quatre pieds transformés en nageoires et les deux antérieurs plus longs;

2° *Les tortues d'eau douce;* leurs pieds sont palmés, leur carapace est jointe par une membrane avec le plastron et soutenue sur ses côtés par deux larges saillies de ce plastron (3);

---

(1) Klein, *Quadrupedum dispositio brevisque historia naturalis.* Lipsiæ, 1751.

(2) Beaucoup de naturalistes adoptent pour l'ordre des tortues le nom de *Testudinata*, Klein; mais comme c'est Al. Brongniart qui a établi, en premier lieu, l'*ordre* des *Chéloniens*, nous adopterons le terme du naturaliste français, d'autant plus que sous le nom de *Testudinidæ* ou *Testudinina*, etc., on désigne aujourd'hui communément les tortues terrestres, les *Chersites* de Duméril et Bibron.

(3) Ce groupe doit comprendre nos tortues appelées *Pleurodères*, *Trionyx*, *Emys*, *Cistudo*, etc. La diagnose est erronnée, car toutes n'ont pas de pédoncules axillaires et

3° *Les tortues terrestres,* qui ont les pieds renflés et onguiculés; leur carapace est convexe et rattachée au plastron par des jointures osseuses.

Lacépède.

Lacépède (1) suit Klein, en admettant :

1° *Les tortues de mer,* qui ont les doigts très inégaux et les membres allongés en forme de nageoires;

2° *Les tortues terrestres et fluviatiles,* dont les doigts sont courts et presque égaux.

Al. Brongniart.

La classification (2) proposée par Brongniart ne s'écarte pas de celle de Klein; cet auteur divise les *Chéloniens* (3) en deux genres, correspondant aux deux subdivisions de Klein (*Chelone* et *Testudo*). Plus tard, dans les *Mémoires des savants étrangers,* il distingue, sous le nom d'*Emys,* les tortues d'eau douce.

Latreille.

Dans son *Histoire naturelle des Reptiles,* publiée en 1801, Latreille (4) suit la même classification primordiale :

a) *Tortues de mer :* Pieds disposés en nageoires à doigts très inégaux, allongés, élargis et dont le grand nombre n'a que des ongles larges et arrondis.

b) *Tortues d'eau douce et de terre,* dont les pieds sont presque

---

inguinaux, plusieurs ont le plastron soudé à la carapace par des jointures osseuses. Nous ne relèverons plus dans la suite des erreurs matérielles de ce genre.

(1) Lacépède, *Histoire naturelle des quadrupèdes ovipares et des serpents,* 2 vol. in-4°, avec pl., 1788 et 1789.

(2) Al. Brongniart, *Magasin encyclopédique,* 1799, p. 184. — Id *Mémoires de l'Institut, Savants étrangers,* t. I, p. 587. – Id. *Essai d'une classification naturelle des Reptiles,* 1805; c'est dans ce dernier qu'il crée l'*ordre* des Chéloniens.

(3) L'*ordre* des Chéloniens a été unanimement adopté par les naturalistes. Il n'y a que Straus qui, dans son *Anatomie du chat* et dans son *Traité d'anatomie comparative,* place les *Chéloniens* après les Reptiles, et établisse pour les premiers une *classe* spéciale qu'il caractérise comme suit : « Sang rouge et froid; ils respirent par des poumons; leurs épaules et leurs bassins sont placés sous leurs côtes ».

(4) Latreille, *Histoire naturelle des Reptiles,* p. 7.

égaux, peu allongés, munis presque tous d'un ongle crochu et distinct.

A cette classification, Latreille en a substitué plus tard une autre basée sur des caractères différents.

Daudin.

Dans son volumineux ouvrage sur les Reptiles [1], Daudin suit aussi la classification de Linné ; il divise les tortues en trois sections :

a) *Chéloniens ou tortues marines :* Pieds aplatis en nageoires écailleuses ; doigts inégaux, allongés, élargis, réunis entre eux, ayant de vrais ongles très petits sur leur bord extérieur, et terminés par des lames écailleuses, larges et aplaties.

b) *Tortues d'eau douce* [2] *:* Pieds ayant des doigts très distincts, terminés presque tous par des ongles crochus. Ces doigts sont palmés dans les uns, demi-palmés ou même non palmés dans les autres.

c) *Tortues terrestres :* Pieds ayant des doigts non distincts et réunis en un moignon écailleux d'où partent des ongles.

Vers cette époque, grâce à l'impulsion donnée aux études zoologiques par Cuvier, Brongniart, Geoffroy, Duméril, Blainville, etc., les Chéloniens furent également mieux étudiés; néanmoins la systématique ne faisait pas des progrès correspondants : les auteurs se contentèrent de citer les uns à la suite des autres les genres nouvellement créés, ou ils adoptèrent l'une des classifications antérieures, en en modifiant, corrigeant et amplifiant la diagnose.

Oppel.

Oppel [3], élève de Duméril, a profité des travaux et de l'enseignement de son maître. Dans son ouvrage, il subdivise les

---

[1] DAUDIN, *Histoire naturelle, générale et particulière des Reptiles*. Paris, an XIII, p. 9, 68 et 218.

[2] Cette section comprend toujours les tortues molles ou nos *Trionyx*.

[3] OPPEL, *Die Ordnungen, Familien und Gattungen der Reptilien als Prodrom einer Naturgeschichte derselben*. Munich, 1881, in-4°.

Chéloniens *Testudinati* en deux sections, d'après la méthode de Klein, et il donne le premier des noms à ces sections. La seconde section est subdivisée en deux tribus d'après la nature de l'épiderme.

Bien que cet auteur ait introduit des modifications importantes dans d'autres groupes zoologiques, sa classification des Chéloniens ne montre guère un progrès; il divise ses groupes en genres, par un tableau dichotomique.

Voici la classification d'Oppel :

Testudinati . . .	I. *Chelonii*	. . . .	1. *Chelonia.*
	II. *Amydæ.*	*a*) à peau molle	2. *Trionyx.*
		b) à peau écailleuse.	3. *Chelys.*
			4. *Testudo.*
			5. *Emys.*

Cuvier.

Cuvier est le premier naturaliste qui ait bien étudié l'anatomie et l'ostéologie des Chéloniens. Bien qu'il n'ait pas voulu donner une classification proprement dite, Cuvier (¹) distinguait dans les Chéloniens les cinq genres suivants :

1° Les tortues de terre : *Testudo.*
2° — d'eau douce : *Emys.*
3° — de mer : *Chelonia.*
4° — à gueule : *Chelys.*
5° — molles : *Trionyx.*

Ces animaux sont distingués les uns des autres non pas seulement d'après la nature des extrémités, mais d'après l'ensemble de leur conformation : ossification de la carapace plus ou moins complète, forme du crâne, présence de lèvres molles dans les *Chelys*, épiderme mou des *Trionyx*, etc. Cuvier a conservé le même arrangement dans la seconde édition du règne animal.

(¹) *Règne animal*, II, 9, 1817. — *Recherches sur les ossements fossiles*, 2e édition 1824, t. V; 2e partie, in-4°, p. 175 pour les espèces vivantes, et p. 220 pour les espèces, fossiles; pl XI, XII, XIII, XIV et XV. — *Annales du Muséum d'histoire naturelle*, t. VII, p. 229, sous le titre : *Sur les ossements fossiles de tortues.*



Merrem.

Merrem ([1]) reproduit encore la classification fondamentale de Klein, ou plutôt celle d'Oppel augmentée de quelques genres.

Testudinata. . . .	Pedibus pinniformibus	1. *Caretta*.
		2. *Sphargis.*
	Pedibus digitatis . . .	3. *Trionyx.*
		4. *Testudines.*

Les ***Testudines*** comprennent Matamata, Emys, Terrapene et Chersina.

Fleming.

On ne peut guère considérer comme une classification le tableau des Chéloniens donné par le Dr John Fleming ([2]).

Chelonea. . .	Cavity with. a lid . . .	A. *Lips corneous* . .	1. *Cistuda*
	Cavity without a lid.	*Lips corneous.*	2. *Testudo.*
			3. *Emys.*
			4. *Chelonura* ([3]).
			5. *Chelonia.*
			6. *Coriudo* ([4]).
		B. *Lips fleshy* . . .	7. *Chelys.*
			8. *Trionyx.*

Latreille.

La classification proposée par Latreille ([5]), en 1825, s'appuie fondamentalement sur la propriété qu'ont beaucoup de Chéloniens de retirer la tête et les membres sous lacarapace.

([1]) Merrem, *Tentamen systematis Amphibiorum*. Marburgi, 1820, in-8°.

([2]) Fleming, *Philosophy of Zoology*, 1822, in Gray, *Catalogue of Shield Reptiles in the Collection of the British Museum*, Part 1, Testudinata, p. 4.

([3]) *Chelonura*, Flem. = *Emysaure*, D. et B. = *Saurochelys*, Latreille = *Rapora*, Gray = *Chelydra*, Schweigger, etc.

([4]) *Coriudo*, Flem. = *Sphargis*, Merr. = *Dermatochelys*, Lesueur = *Scytine*, Wagler, etc. = *Dermochelys*, Blainv.

([5]) Latreille, *Familles du règne animal*. Paris, 1825, p. 80.

On peut résumer comme suit sa classification :

CHELONII. . .	Famille I. *Cryptopodes.*			*Tortue.* *Émyde.* *Terrapene.*
	Famille II. *Gymnopodes.*	Carapace écailleuse et solide		*Saurochélyde.* *Chélonée.* *Chelys.*
		Carapace molle . . .		*Trionyx.*

Gray.

En 1825, le Dr John Edward Gray publia dans les *Annales philosophiques* de Philadelphie un aperçu des genres de reptiles et d'amphibiens de l'Amérique du Nord, où nous trouvons une classification ([1]) des Chéloniens rappelant partiellement celle de Latreille.

CHELONII. . .
1. Feet and head retractile into the carapace. Carapace solid, covered with horny scales = *Cryptopodi.*
2. Feet and head not or only part by retractile into the carapace. Carapace mostly soft = *Gymnopodi.*

Les *Cryptopodi* comprennent :

Fam. I. TESTUDINIDÆ.		1. *Testudo.*
Fam. II. EMYDIDÆ	Beak horny; sternum entire, *Emydina.*	1. *Emys.*
	Beak horny; sternum transversaly sutured, *Terraphenina.*	2. *Terraphene.* 3. *Sternothærus.* 4. *Kinosternon.*
	Beak fleshy : *Chelidina.*	5. *Chelys.*

Les *Gymnopodi* sont subdivisés principalement d'après la nature de leur épiderme en

Fam. III. TRIONYCIDÆ	1. *Triônyx.*	
— IV. SPHARGIDIDÆ	1. *Sphargis.*	
— V. CHELONIADÆ.	1. *Chelonia.*	

C'est la première fois que le *Sphargis* est placé dans une famille distincte.

([1]) GRAY, *Ann. philosoph.,* septembre 1825, n° 57, p. 193.

Cette division fondamentale, identique à celle de Latreille, s'écarte néanmoins de cette dernière en ce que les *Émysaures* et les *Chélydes* sont placés dans les *Emydidæ* : Gray n'a donc pas uniquement tenu compte de la rétractilité de la tête et des pieds sous la carapace, il a rapproché les animaux qui avaient, selon lui, une organisation commune.

Le groupe des *Chelydina* n'est pas encore défini dans le sens actuel de nos *Chélydes* et n'a pas la même extension. Ce sont toujours les caractères tirés de la tête, la trompe, notamment les prétendues lèvres molles (1), qui servent à le caractériser.

Haworth.

La même année, Haworth (2) a donné une classification des *Pholidota* (= *Reptilia*) et des *Batrachia*.

Les *Fornicata* (= *Chéloniens*) constituent le premier groupe des *Pholidota*.

FORNICATA	*Edigitata*	*Caretta.*
		Sphargis.
	Digitata	*Testudo.*
		Matamata.
		Emys.
		Terrapene.
		Chersine.

Ce tableau s'appuie sur le caractère tiré des doigts, qui ne sont pas distincts dans les tortues appelées mal à propos *Edigitata* et sont apparents dans les *Digitata.*

Fitzinger.

En 1826, Fitzinger a publié (3) à Vienne une classification des reptiles, où l'auteur montre une critique très saine et une grande érudition. Appuyé sur l'ensemble des caractères, il divise

(1) Touchant les lèvres molles de *Chelys*, on peut consulter DUMÉRIL et BIBRON, *Erpétologie*, t. II, pp. 454 sqq.; et STRAUCH, *Chelonologische Studien*, p. 49.

(2) HAWORTH, *Philosoph. Magazine*, mai 1825, p. 372.

(3) FITZINGER, *Neue Classification der Reptilien.* Vienne, 1826.

les Chéloniens en cinq familles, correspondant aux cinq genres de Cuvier.

TESTUDINATA	1. *Carettoïdes*	*Caretta.* *Sphargis.*
	2. *Testudinoïdes*	*Testudo.*
	3. *Émydoïdes*	*Terrapene.* *Emys.* *Chelodina.* *Chelydra.*
	4. *Chélydoïdes*	*Chelys.*
	5. *Trionichoïdes*	*Trionyx*

Bell.

En 1825 (1), l'illustre médecin anglais Bell proposa, dans le *Zoological Journal*, de réunir dans une sous-famille les *Emydidæ*, dont le sternum est mobile. Il les désignait sous le nom de *Sternothærina*. Plus tard, dans un memoire spécial (2) et dans sa monographie des Chéloniens, il adopte cette sous-famille et il donne une classification s'écartant peu de celle de Gray et appuyée sur les mêmes caractères.

TESTUDINATA.	A. *Digitata.*	Fam. I. *Testudinidæ*	1. *Testudo.* 2. *Pyxis.* 3. *Kinixys.*
		Fam. II. *Emydidæ*	*a*) STERNO MOBILI (3). 1. *Terrapene* 2. *Sternothærus.* 3. *Kinosternon.* *b*) STERNO SOLIDO. 4. *Hydraspis.* 5. *Emys.* 6. *Chelonura.* 7. *Chelys.*
		Fam. III. *Trionychidæ.*	1. *Trionyx.*
	B. *Pinnata.*	Fam. IV. *Sphargidæ.*	1. *Sphargis*
		— V. *Cheloniadæ*	1. *Chelonia.*

---

(1) THOMAS BELL, *A Monograph of the Tortoises having a moveable Sternum, with Remarks on their Arrangement and Affinities.* ZOOLOGICAL JOURNAL, 1825, vol. II, p. 299.

(2) BELL, *On the Characters of the Order, Families and Genera of the Testudinata.* ZOOL. JOURN., III, 513, 1828.

(3) Ce groupe *a*) = *Sternothærina.* Gray, en 1825 (ANN. OF PHILOSOPHY, vol. X, p. 211), l'appelait *Terraphenina.*

Ritgen.

En 1828, Ritgen a publié (¹) aussi une classification des Amphibiens, mais elle date de 1826. Quant aux Chéloniens, il ne fait que reproduire la classification primitive de Linné. Les Chéloniens portent le singulier nom de *Starrleiber* = *Sterrichrotes.*

STERRICHROTES. . .
- Fam. I. *Flosschildkröten* = *Eretmochelones* = *Halichones*, comprenant *Mydæ*, *Caretta* et *Sphargis.*
- Fam. II. *Schwimmhautschildkröten* = *Phyllopodechelones* = *Chersydrochelones*, comprenant *Amydæ*, *Chelonia*, *Trionyx*, *Matamata* et *Emys.*
- Fam. III. *Gangfusschildkröten* = *Podechelones* = *Chersochelones*, comprenant *Dysmydæ*, *Clemmys* *Terrapene*, *Chersine.*

Cette classification est plutôt un pas en arrière qu'un progrès. Les considérations dont l'auteur accompagne cette classification indiquent qu'il n'était pas suffisamment au courant de la littérature et de l'anatomie de ces animaux. Vers la fin (p. 272), l'auteur opine, sans donner de preuves, que *Plesiosaurus* est un Chélonien, bien qu'il le place encore parmi les *Sauriens.* Dans ces derniers temps, nous voyons reparaître des rapprochements entre les *Plésiosaures* et les *Chéloniens*, mais, cette fois, appuyés sur des données positives.

Wagler.

Un des meilleurs ouvrages de l'époque dans laquelle nous sommes est le *Naturliches System der Amphibien* du Dr J. Wagler (²). Cet auteur a fait une étude très soignée des Chéloniens; il a parfaitement bien défini plusieurs genres nou-

(¹) RITGEN, *Versuch einer Naturlichen Eintheilung der Amphibien.* Présenté à l'Académie le 30 mai 1826. NOVA ACT. CUR NAT., XIV, 1828, p. 247.
(²) WAGLER, *Naturliches System der Amphibien.* Munich, 1830.

veaux; il a reconnu ([1]) que le cou des tortues d'eau douce (= *Steganopodes*) se recourbait de deux manières : chez *Aspidonectes, Trionyx, Clemmys, Staurotypus, Pelusios, Cinosternon, Emys,* il se contracte en *S*; chez *Chelydra* (c'est une erreur), *Rhinemys, Hydromedusa, Podocnemis, Platemys, Phrynops, Pelomedusa,* il se replie latéralement; de plus, les premiers ont le bassin mobile et soudé au plastron.

Wagler ne comprend dans l'ordre des *Testudines* qu'une seule famille, *Hedæroglossæ*, nom tiré d'un caractère de la langue, et subdivise cette famille d'après la forme des pattes; selon l'usage de l'époque, chacune des subdivisions de Linné reçut un nom nouveau tiré du grec.

Les *Hedæroglossæ* sont subdivisées en trois tribus :

1° Pattes en nageoires immobiles, aplaties et de longueurs inégales = *Oiacopodes* ([2]), comprenant les genres Chelonia et Dermatochelys.

2° Pattes palmées et à doigts mobiles réunis par une membrane lâche = *Steganopodes* ([3]), comprenant les genres Aspidonectes, Trionyx, Chelys, Rhinemys, Hydromedusa, Podocnemis, Platemys, Phrynops, Pelomedusa, Chersina, Clemmys, Staurotypus, Pelusios, Cinosternon, Emys.

3° Pattes en moignon, les doigts immobiles, de même longueur et enveloppés dans la peau des pattes = *Tylopodes* ([4]), comprenant Cinyxis, Pyxis, Chersus, Testudo.

Gray.

En 1831 ([5]), le Dr Gray refait sa première classification : comme Wagler, il a constaté la soudure du bassin avec le plastron de plusieurs tortues d'eau douce; il réunit ces dernières, pour la première fois, en un groupe nouveau *Chelydidæ*, nom emprunté

([1]) WAGLER, *Ibid.*, p. 218.
([2]) *Oiacopodes* = pieds en rames.
([3]) *Steganopodes* = pieds palmés.
([4]) *Tylopodes* = pieds calleux.
([5]) Dr GRAY, *Synopsis reptilium*, part. I, 1831.

à l'un des genres; mais il abandonne la famille des *Sphargididæ* et place la tortue à peau coriace avec les autres tortues marines.

CHELONII. . .
Fam. I. TESTUDINIDÆ : *Testudo, Chersina, Kinyxis, Pyxis.*
— II. EMYDÆ : *Cistudo, Emys, Kinosternon, Chelydra.*
— III. CHELYDIDÆ : *Sternothærus, Chelodina, Hydraspis, Chelys.*
— IV. TRIONYCIDÆ : *Trionyx, Emyda.*
— V. CHELONIADÆ : *Sphargis, Chelonia.*

Wiegmann et Ruthe.

Cette classification de Gray fut adoptée par Wiegmann et Ruthe dans leur *Handbuch der Zoologie* ([1]), 1832 ; mais la nomenclature fut encore partiellement changée.

Les *Chelonii* comprennent :

Fam. 1. CHELONÆ : *Sphargis, Chelonia.*
— 2. CHERSINÆ : *Testudo.*
— 3. EMYDÆ : *Emys, Chelydra, Cinosternon.*
— 4. CHELYDÆ : *Chelys.*
— 5. CHILOTÆ : *Trionyx.*

Ces auteurs ne citent qu'un nombre restreint de genres et d'espèces. Le rapprochement des tortues marines et terrestres offre un certain intérêt et sera reproduit plus tard par Rutimeyer. Ces deux groupes sont généralement considérés comme les deux termes extrêmes de l'ordre.

Bonaparte.

Le prince Charles-L. Bonaparte a publié à quatre reprises différentes la classification des Chéloniens.

1° *Saggio di una distribuzione metodica degli animali vertebrati, Roma,* 1831, page 63;

2° *Systema generale d'erpetologia,* 1832, cité par Gray. Ne serait-ce pas un chapitre détaché de l'ouvrage précédent?

3° *Tavola analitica dei Chelonii,* 1836;

([1]) Cité par GRAY, *Catalogue of Shield Reptiles, etc.,* p. 5.

4° *Wiegman's Archiv für Naturgeschichte*, 1838, tome I. pages 136 sqq.

Dans le premier ouvrage, page 63, il divise comme suit :

ORDINE 1. *Chelonii.*

Famiglia 1. *Testudinidæ.* Piedi digitati : gusci ossei : timpano manifesto. Terrestri o d'acqua dolce.

§ I. *Testudinina.* Labbra cornee.
§ II. *Chelina.* Labbra carnose.

Famiglia 2. *Trionycidæ.* Piedi digitati; gusci coriacei; timpano latente; labbra carnose. Fluviatili.

Famiglia 3. *Chelonidæ.* Piedi pinniformi; labbra cornee; timpano latente. Marine.

§ I. *Sphargidina.* Gusci coriacei.
§ II. *Chelonina.* Gusci ossei.

Il n'admet qu'un certain nombre de genres; beaucoup de genres créés par Wagler et Gray sont considérés comme des sous-genres.

L'auteur a été amené à réunir dans sa première famille les tortues terrestres et paludines par la considération qu'il existait un passage insensible entre la forme des pieds des premières et des secondes. Il ne tenait nullement compte, comme Wagler et Gray, de l'organisation interne des animaux.

La seconde classification est identique à la première, comme les deux dernières sont aussi identiquement les mêmes.

La classification publiée en 1836 reste au fond la même que la précédente, seulement le prince divise la première famille en quatre groupes, et il rétablit plusieurs genres qu'il considérait auparavant comme des sous-genres.

CHELONII	Fam. I. *Testudinidi.*	a. *Testudinidinini.*
		b. *Emidini.*
		c. *Hydraspedini.*
		d. *Chelini.*
	— II. *Trionicidi*	*Trionychini.*
	— III. *Chelonidi.*	a. *Chelonini.*
		b. *Sphargidini.*

Le groupe *Chelini* ne renferme que le genre *Chelys*, et les autres genres, caractérisés par une plaque intergulaire et la soudure du bassin, sont placés dans les *Emidini* ou les *Hydraspedini.*

Duméril et Bibron (¹).

Duméril et Bibron (tome I, pages 355 sqq.) divisent les tortues comme suit :

1° *Chersites* ou tortues terrestres : pattes courtes, arrondies en moignon dont les doigts ne sont point distincts en dehors; les mâchoires nues, cornées, tranchantes ou dentelées; le tympan visible; les yeux latéraux, à paupière inférieure plus haute que la supérieure; la langue papilleuse.

2° *Élodites* ou tortues des lieux humides ou marécageux : pattes plus ou moins étalées, à doigts au nombre de cinq, mobiles, le plus souvent réunis par des membranes ou palmés; les mâchoires presque constamment cornées, tranchantes et à nu; le tympan visible; les yeux à paupière d'égale hauteur; la langue à surface lisse, mais présentant des plis longitudinaux.

Cette famille est subdivisée en deux sous-familles :

a) *Cryptodères* : tête conique, parfois aussi haute que large; yeux placés latéralement ou tout à fait de côté; cou court, gros, arrondi, enveloppé d'une peau lâche, non adhérente, formant autour de la tête une sorte de palatine engainante quand l'animal retire sa tête sous la carapace dans la région moyenne et entre les pattes, bassin libre;

b) *Pleurodères* : tête déprimée; mâchoires plus larges, moins cornées; ouverture buccale grande; yeux rapprochés de la ligne médiane vers le dessus de la tête. Cou long, gros, se contournant latéralement pour s'abriter sous la carapace; bassin soudé au plastron.

3° *Potamites* : corps recouvert d'une peau molle, nue, sans

(¹) *Erpétologie générale ou Histoire naturelle complète des Reptiles.* Paris. Le premier volume, traitant des généralités sur les Reptiles et de la littérature, date de 1834; le second, traitant des Tortues, date de 1835. — C. et A. Duméril, *Catalogue méthodique de la collection des Reptiles.* Paris, 1851.



écailles, à bords libres et flexibles, détachés du sternum; tête revêtue d'une peau molle, sans apparence de tympan au dehors; narines prolongées en une sorte de trompe; mâchoires presque à à nu, en dehors des replis de la peau; langue épaisse, amincie sur les bords; le cou long, cylindrique, rétractile, à peau lâche; les membres aplatis et recouverts d'une peau sans aucune écaille; cinq doigts dont trois portent des ongles forts, solides, canaliculés en dessous.

Ils renferment deux genres: le premier (*Gymnopodes*) comprenant les Potamites dont les pattes ne sont pas rétractiles et ne peuvent être cachées entièrement sous la carapace; le second (*Cryptopodes*), ceux qui peuvent les abriter complètement sous la carapace.

4° *Thalassites*, à carapace déprimée, tête pyramidale, tympan invisible, membres aplatis en manière de rames, les antérieurs plus développés que les postérieurs, non rétractiles sous la carapace; doigts allongés non distincts au dehors, seulement on observe encore les traces d'un ou de deux ongles. Ils comprennent deux genres: *Sphargis* à peau coriace, et *Chélonées* couvertes d'écailles cornées.

Cette classification a été adoptée par beaucoup de naturalistes, notamment par sir R. Owen, dans ses nombreux travaux chélonologiques.

De Blainville.

En 1816, de Blainville [1] insistait sur les affinités des *Crocodiliens* et des *Chéloniens*, et il détachait les premiers de l'ordre des *Sauriens*. En 1835, il divise les *Chelonia* en quatre familles:

Chelonea, pour les tortues marines.
Testudinea, — — terrestres.
Emyda, — — paludines.
Amyda ou *Trionyx*, pour les tortues fluviatiles.

---

[1] De Blainville, *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, pour 1816; — Id., *Traité d'anatomie comparée*, 1822; — Id., *Reptiles de la Californie et système d'erpétologie et d'amphibiologie*. Nouvelles archives du Muséum pour 1835.

Duméril et Bibron avaient, à cette époque, publié le premier volume de leur erpétologie et ils publiaient le second. De Blainville n'a fait que changer les dénominations des auteurs de l'erpétologie.

Swainson.

Dans toutes les classifications antérieures, on a subdivisé les Chéloniens sans tenter de les rattacher à quelque ordre de Reptiles. Le premier qui a tenté ce rapprochement est Swainson ([1]).

Après les Crocodiliens, auxquels il donne le nom d'*Émydosaures* ([2]), il place les *Chélonides,* rattachés aux précédents par *Chelydra,* etc., qui extérieurement, par la longueur de leur queue carénée, etc., semblent rappeler les *Crocodiliens.*

Le tableau suivant résume son système :

CHÉLONIDES.	Famille I. *Chelidridæ* (crocodile tortoises).	*Chelydra.* *Platysternon.* *Chelys.*
	Famille II. *Testudinidæ*	*Testudo.* *Chersina.* *Homopus.* *Pyxis.* *Kinyxis.*
	Famille III *Emydæ*	*Cistudo.* *Emys.* *Kinosternon*, *Sternothærus.* *Chelodina.* *Hydraspis.*
	Famille IV. *Trionycidæ*	*Trionyx.* *Emyda.*
	Famille V. *Chelonidæ*.............	*Chelonia.* *Sphargis.*

Fitzinger.

Bien que les travaux de Gray, Duméril, Bell, etc., aient motivé, parait-il, des changements dans la classification des

---

([1]) W. SWAINSON, *Natural History and Classification of Fishes, Amphibians and Reptiles.* London, 1839, p. 343. LARDNER'S CABINET CYCLOPEDIA.

([2]) En 1816 (*Bulletin de la Soc. philomathique,* 1816, p. 111), de Blainville trouvait entre les Chéloniens et les Crocodiliens une affinité assez grande pour désigner ces derniers sous le nom d'*Émydosauriens,* terme adopté par Swainson.

tortues, on voit reparaître encore les divisions fondamentales dues à Linné. Le tableau suivant résume la systématique de ce groupe d'après Fitzinger (1), en 1843.

TESTUDINATA.

- Order I. *Tylopoda.* Fam. 1. TESTUDINIDES, comprenant *Cinyxis*, *Chersina* et *Testudo*.
- Order II. *Steganopoda.*
  - § I. *Rostrata*, fam. 1. EMYDÆ, comprenant *Emys*, *Clemmys*, *Chelydra*, *Staurotypus*, *Cinosternon*.
    - Fam. 2. HYDRASPIDES, comprenant *Hydraspis*.
  - § II. *Mandibulata*, fam. 1. CHELYDÆ, pour *Chelys*.
  - § III. *Labiata*, fam. 1. TRIONYCHES, comprenant *Trionyx*, *Aspidonectes*.
- Order III. *Oiacopodes.* Fam. 1. CHELONIÆ, comprenant *Chelonia* et *Thalassochelys*.
  - Fam. 2. DERMATOCHELYDÆ, pour *Dermatochelys*.

Mayer.

Comme l'auteur précédent, Mayer (2) distingue seulement les tortues terrestres, d'eau douce et de mer, mais il leur donne encore des noms nouveaux :

1. *Bœnodactyli* = tortues terrestres.
2. *Eressodactyli* = tortues d'eau douce, y compris *Trionyx*.
3. *Pterodactyli* = tortues marines.

Leconte.

La classification du major Leconte (3) s'écarte beaucoup des précédentes, tant dans son ensemble que par les caractères sur lesquels elle s'appuie.

---

(1) FITZINGER, *Systema reptilium*, 1843, p. 29.

(2) MAYER, *System des Thierreichs*, 189, 1849, et *Wiegman's Archiv für Naturgesch.*, 1850, p. 67.

(3) LECONTE, *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia*, vol. VII, 1854, p. 186.

Familia prima.

Pedes pinniformes. Sternum osse episternali postice producto.

a) *Chelone.*
b) *Sphargis.*

Familia secunda.

Pedes compressi, ungulati. Sternum scuto singulo (abdominali) alato, alarum marginibus non inflexis.

A. Sternum osse episternali postice producto.

Chelydra.
Staurotypus.
Trionyx.
Emyda.

B. Sternum plus minus uni-vel-bivalve, osse episternali maximo, entosternali obsoleto (in pullis rudimentali), alis a scuto abdominali solum proiectis.

Kinosternum.

Familia tertia.

Pedes ungulati plerumque compressi. Sternum scutis duobus alatis (pectorali abdominalique), alarum marginibus, excepta Cistudine, fortiter inflexis; scutis caudalibus duobus distinctis.

§ α. Sternum scutis 11 seu 12 tectum.

Emys.
Platysternum.
Teleopus. Lc.
Lutremys.
Cistudo.

§ β. Sternum scutis 13 tectum.

Chelys.
Chelodina.
Sternothærus.
Pentonyx.
Platemys.
Podocnemis.

FAMILIA QUARTA.

Terrestres. Corpus scutatum. Sternum alatum, sutura laterali ossea, alarum marginibus fortiter inflexis. Pedes clavati, ungulati, scutum caudale nunquam divisum, sed stria superiore perpendiculari fortiter impressa, qua in partes duas secari videtur.

Testudo.
Pyxis.
Homopus.
Kinyxis.

Le fait capital de cette classification est la fusion des *Trionychida* avec *Chelydra* et *Staurotypus* en une seule famille.

Strauch (1).

En 1862, Strauch adopte la première classification donnée par Bonaparte et, ne s'appuyant que sur des caractères extérieurs, combat la classification de Duméril, surtout parce qu'il y a un passage insensible entre les pattes des *Chersites* et des *Élodites* de Duméril.

Il divise les tortues (*Chelonia*) en trois familles :

1° *Testudinida.* Der Rückenschild stets oval, aber in sehr verschiedenem Grade gewölbt; die Brustschildknochen stets zu einer Platte verwachsen, die höchstens in der Mitte offen bleibt; beide stets mit Hornplatten gedeckt. Tympanum stets sichtbar. Die Extremitäten Gang- oder Schwimmfüsse. Die Krallen von verschiedener Form, an den Vorderfüssen nie unter 4, gewöhnlich aber 5, an den Hinterfüssen gewöhnlich 4, selten 5 und nur in einem Falle 3. Die Lebensweise terrestrisch oder amphibiotisch.

Cette famille se subdivise en deux tribus :

a) *Chersemyda* : Das Becken frei, nicht mit dem Brustschilde verwachsen. Höchstens 2 Gularplatten, oft nur eine, selten keine.

---

(1) STRAUCH, *Chelonologische Studien mit besonderer Beziehung auf die Schildkrötensammlung der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu St-Petersbourg*, 1862. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE ST-PÉTERSBOURG, t. V, n° 7.

Diese Thiere haben fast sämmtlich die Fähigkeit, Kopf und Hals unter den Rückenschild einzuziehen.

b) Chelyda : Das Becken stets mit dem Brustschilde verwachsen. Dieser letztere stets mit 13 Platten, indem ausser den 2 Gularplatten immer eine Intergularplatte vorhanden ist. Diese Thiere ziehen Kopf und Hals zu allermeist nicht unter den Rückenschild ein, sondern beide Theile werden auf die Seite geklappt und unter dem meist vorragenden Rande des Rückenschildes verborgen.

2° *Trionychida* : Rückenschild stets von ovaler Form, dabei meist sehr flach gewölbt, zeigt einen knöchernen, auf seiner Oberfläche vermiculirten oder granulirten Discus und rund um denselben einen weichen knorpeligen Rand, welcher letztere höchst selten von einzelnen auf ihrer Oberfläche granulirten Randknochen gestützt ist; der Brustschild besteht aus zeitlebens getrennten Knochen; beide sind von einer continuirlichen Haut überzogen und ohne eine Spur von Hornplatten. Die Nasenlöcher stets in einen weichen Rüssel verlängert und die Kiefer mit fleischigen Lippen gedeckt. Das Tympanum unter der Haut versteckt. Die Extremitäten stets so genannte *pattes en palettes*, d. h. dreikrallige, mit sehr entwickelten Interdigitalmembranen versehene Schwimmfüsse. Kopf und Hals unter die Schale einziehbar, zuweilen können auch die Extremitäten und der kurze Schwanz durch besondere Sternalklappen verborgen werden. Lebensweise durchaus aquatisch.

3° *Cheloniida* : Rückenschild herzförmig, vorn rundlich ausgerandet, hinten zugespitzt. Die Knochen des Brustschildes verwachsen nicht zu einer Platte, sondern sind zeitlebens getrennt. Die ganze Schale entweder mit einer continuirlichen Lederhaut überzogen, oder mit einzelnen regelmässig geformten, parquetirten oder imbricaten Hornplatten gedeckt. Der Hornüberzug der Kiefer durchweg sehr massif. Das Tympanum verborgen. Die Extremitäten stellen Flossenfüsse mit durchaus verflachten Zehen dar, welche, die letzte oder auch die beiden letzten ausgenommen, mit einander unbeweglich verbunden sind; die Vorderfüsse

bedeutend länger als die Hinterfüsse. Die Krallen rudimentär, höchstens in der Zahl 2 an jedem Fusse vorhanden, selten ganz fehlend. Kopf und Extremitäten können nicht unter die Schale eingezogen werden. Lebensweise durchaus aquatisch und zwar bewohnen diese Thiere die Meere der heissen und gemässigten Zone.

Cette famille se divise aussi en deux tribus :

1° *Sphargidina* : Die Schale von einer dicken Lederhaut überzogen. Die Extremitäten ohne Krallen.

2° *Chelonina* : Die Schale von regelmässigen parquetirten oder imbricaten Hornschildern gedeckt, an jedem Fusse eine oder höchstens 2 Krallen.

Gray.

Dans son *Catalogue of Shield Reptiles in the Collection of the British Museum*, 1855, et dans le *Supplement to Catalogue of Shield Reptiles in the Collection*, etc., London, 1870, Gray admet les cinq groupes fondamentaux de 1831, en leur donnant une valeur différente; enfin il subdivise à l'infini les groupes secondaires.

En 1855, page 4, il donne :

Chelonia.

A. *Digitate*.

a) Back with horny scales.

I. *Testudinidæ* : Feet club-shaped ; claws 5-4 or 4-4, blunt. Caudal shield united into one, incurved. Neck retractile.

II. *Emydidæ* : Feet palmated, claws 5-4 or 4-4. Caudal shields separate. Neck retractile. Pelvis attached to the vertebræ only. Sternal shields 11 or 12.

III. *Chelydidæ* : Feet palmated, claws 5-4 or 5-5, acute. Caudal shield separate. Neck contractile. Pelvis attached to the vertebræ and sternum. Sternal shields 13.

b) Back with soft skin.

IV. *Trionycidæ* : Feet palmated, claws 3-3, acute. Bones covered with a soft skin having a flexible margin.

B. *Pinnate.*

V. *Cheloniadæ* : Feet fin shaped, compressed.

En 1870, page 3 du supplément, ces subdivisions sont considérées comme des sous-ordres et elles changent de noms.

Ce sont :

Suborder 1. *Tylopoda.*
— 2. *Steganopodes.*
— 3. *Pleurodères.*
— 4. *Trionychoïdea.*
— 5. *Oiacopodes.*

Ces sous-ordres sont divisés en un nombre considérable de familles, de tribus.

		Tribus.
Tylopoda	Fam. 1. *Testudinidæ*	*Testudinina.* *Homopina.* *Kiniæyna.* *Manouriana.*
Steganopodes.	Fam. 1. *Cistudinidæ*	*Cistudinina.* *Lutremyina.* *Cyclemydina.*
	Fam 2. *Emydidæ*	*Geoemydina.* *Emydina.* *Belliana.*
	Fam. 3. *Malaclemmydæ.*	
	— 4. *Pseudemydæ.*	
	— 5 *Dermatemydæ.*	
	— 6. *Bataguridæ.*	
	Fam. 7. *Chelydradæ*	*Chelydraïna.* *Staurotypina.* *Aromochelyina.* *Kinosterninina.*
	Fam 8. *Platysternidæ.*	
Pleurodères.	Fam. 1. *Chelydidæ.*	
	— 2. *Hydraspididæ.*	
	— 3. *Pelomedusidæ.*	
	— 4. *Peltocephalidæ.*	
Trionychoïdea.	Fam. 1. *Chitradæ.*	
	— 2. *Trionychidæ.*	
	— 3. *Emydinadæ.*	
Oiacopodes	Fam. 1. *Cheloniadæ.*	
	— 2. *Sphargididæ.*	

Dans les dernières années de sa vie, Gray avait la manie de classer les animaux; observateur sagace et minutieux, il découvrait les moindres détails, les plus petites modifications qui échappaient aux autres naturalistes; mais il avait le tort de fonder sur ces détails des divisions du règne animal. En 1873 ([1]), étudiant la surface alvéolaire des tortues terrestres, il fut amené à les subdiviser comme suit :

LAND-TORTOISES. TESTUDINATA.	Section I. .	Tribe 1. *Xerobatina.*
		— 2. *Megalochelyina.*
		— 3. *Chelonoidina.*
	Section II. . .	Tribe 4. *Peltastina.*
	Section III.	Tribe 5. *Homopina.*
		— 6. *Pyxidina.*
	Section IV. .	Tribe 7. *Kinixyina.*

Agassiz.

Dans la seconde partie ([2]) de son grand ouvrage, *Contributions to the Natural History of the United States of America*, Agassiz a exposé une classification nouvelle des Chéloniens, classification bien naturelle, pense-t-il :

Ordo. TESTUDINATA, Klein.	I. Subordo. *Chelonii,* Oppel.	Fam. 1. *Sphargididæ.*	
		— 2. *Chelonioidæ.*	
	II. Subordo. *Amydæ,* Oppel.	Fam. 1. *Trionychidæ.*	
		— 2. *Chelyoidæ.*	
		— 3. *Hydraspididæ.*	
		— 4. *Chelydroidæ.*	
		— 5. *Cinosternoidæ.*	Subfam. 1. *Ozothecoidæ.*
			— 2. *Cinosternoidæ.*
		— 6. *Emydoidæ* . .	Subfam. 1. *Nectemydoidæ.*
			— 2. *Deirochelyoidæ.*
			— 3. *Evemydoidæ*
			— 4. *Clemmydoidæ.*
			— 5. *Cistudinina.*
		— 7. *Testudinina.*	

([1]) GRAY, *On the Skulls and Alveolar Surfaces of Land-Tortoises* (Testudinata). PROCEEDINGS OF THE ZOOLOGICAL SOCIETY OF LONDON, 4 november 1873, p. 722.

([2]) *North American Testudinata,* 1857.

Agassiz n'a pas donné la diagnose bien nette de chacune de ses familles. Quand il les définit, il entremêle des caractères de famille avec des caractères génériques, spécifiques et même des caractères individuels.

La subdivision fondamentale de l'ordre en deux sous-ordres s'appuie uniquement sur les caractères des membres; il est vrai, Agassiz ajoute des caractères secondaires tirés de la carapace et du crâne. Il développe longuement les différences entre les *Sphargididæ* et les *Chelonioidæ*.

L'auteur était tenté (p. 247) d'élever aussi les *Trionychidæ* en sous-ordre, mais les différences existant entre *Sphargis* et *Chelone*, réunis dans un sous-ordre, sont aussi considérables, dit-il, que celles qui existent entre les *Trionychidæ* et les autres *Amydæ*.

La famille des *Chelyoidæ* ne comprend que le seul genre *Chelys* et la diagnose du genre est celle de la famille.

La famille des *Hydraspididæ* est peu définie, faute de matériaux : « The long-necked Hydraspids, dit-il, page 248, with retractile head, or rather where head can be bent laterally and so protected unter the shield... »

Les *Chelydroidæ* (p. 248) sont caractérisés par « their carinated backs, their dentated margin, their broad, flat heads, their narrow cross-like sternum, their large tail, their imperfectly retractile limbs and head... »

Les *Cinosternoidæ*, par l'absence d'entoplastron, « their extentive sternum and their more movable pelvis. »

Les *Emydoidæ*, par « their ovate form, swelling centrally, while the margin has a tendency to spread outward, in which last feature they agree with the *Chelydroids* and *Hydraspids*, while in that respect, they differ strikingly from the *Cinosternoids*, the margin of which has a tendency to round itself up and turn inwards, as is also the case in the genuine *Testudos*, which constitute the last and highest family of the whole order. »

Les tortues *Pleurodères*, comprises dans le sens de Duméril et Bibron, présentent, dit-il (p. 335), un certain parallélisme avec *Trionyx*, *Chelydra*, *Cinosternon*, etc., et ne peuvent pas par

conséquent former une seule famille. Les *Chelyoidæ* rappellent les *Chelydroidæ*; les *Sternothæroidæ* rappellent les *Cinosternoidæ*; *Pelomedusa* + *Pentonyx* rappellent les vraies *Emydoidæ*.

La plupart des caractères sur lesquels il base ses divisions sont connus, mais il leur donne des valeurs plus ou moins grandes. Il a voulu appliquer les règles énoncées par lui dans la première partie de son volume (1) *Essay on Classification*, où il indique les caractères qui doivent guider le naturaliste dans l'établissement des diverses divisions du règne animal.

« *Branches* or *types* are characterized by the plan of their structure.

Classes, by the manner in which that plan is executed, as far as ways and means are concerned.

Orders, by the degrees of complication of that structure.

Families, by their form, as far as determined by structure.

Genera, by the details of the execution in special parts.

Species, by the relations of individuals to one another and to the world in which they live, as well as by the proportions of their part, their ornamentation, etc. »

Aucun naturaliste, croyons-nous, ne peut admettre ces règles tracées *a priori* par l'éminent savant américain. Nous ne voulons pas seulement parler de sa définition de l'espèce, mais surtout des caractères sur lesquels il veut appuyer les divisions du règne animal. Les embranchements n'ont pas évolué d'après un plan commun à tous les animaux, ou d'après un plan uniforme, ou du moins rien ne le prouve. Il n'y a pas de symétrie ou de parallélisme entre les groupes des embranchements. Ces termes : genre, famille, etc., ont des valeurs bien différentes suivant les embranchements. Que l'on compare, par exemple, la classe des oiseaux à celle des reptiles, l'ordre des grimpeurs à celui des Chéloniens, etc. Les familles, ordres, classes ne sont pas fondés en nature, ce sont des coupes artificielles qui nous servent à montrer l'enchaînement des êtres, les rapports qu'ils ont entre eux, la place qu'ils occupent dans l'évolution. Au lieu de ces

(1) AGASSIZ, *op. cit.*, p. 170.

termes on pourrait mettre aussi bien des chiffres ou des lettres.

Que l'on examine les différents ordres admis par Agassiz, il sera bien difficile de reconnaître partout qu'ils sont fondés sur « *the degrees of complication* », etc.

Les subdivisions fondamentales du règne animal sont appelées embranchements. Les groupes naturels et uns que l'on distingue dans les embranchements sont des classes, etc. Ces termes ne signifient que première, deuxième ou troisième subdivision, sans qu'on veuille leur donner une autre signification et sans que les subdivisions correspondantes soient fondées sur les mêmes caractères.

Rutimeyer.

Rutimeyer [1] est, sans conteste, l'un des naturalistes qui ont le plus contribué à nous faire connaître les Chéloniens. Ses travaux seront encore consultés longtemps avec fruit par tous ceux qui ont à s'occuper de ces animaux tant vivants que fossiles. Il est vrai, le savant chélonographe n'a pas proposé de classification nouvelle, il a suivi Duméril, mais il a émis des considérations d'une telle importance sur les divers groupes de ces animaux que nous ne saurions les passer sous silence. Il est le premier naturaliste qui ait attiré suffisamment l'attention sur l'organisation des *Chélydes* dont « die gesammte Organisation von der der Emyden abweicht », notamment celle de la tête, des vertèbres cervicales, de la carapace, etc.

Il considère le groupe des Pleurodères (Dum. et Bib.) comme aussi indépendant que celui des Cryptodères, Dum. et Bibr., ou plutôt comme un groupe parallèle à ce dernier avec des subdivisions correspondantes, comme l'insinue déjà leur singulière distribution géographique actuelle. On aurait :

---

[1] RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten von Solothurn und der übrigen Juraformation*, etc. NEUE DENKSCHRIFTEN DER SCHWEIZ. NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT, Band XXV, 1873. — *Ueber den Bau von Schale der Schädel bei lebenden und fossilen Schildkröten*, etc. VERHANDL. DER NATURFORSCH. GESELLSCHAFT BASEL, vol. VI.



ÉLODITES.

Cryptodères.	Pleurodères.
Chélydroïdes	*Chelys.*
Cistudinida ([1]).	*Sternothærus* + *Pentonyx.*
Euémydes (achte Emyden).	*Platémydes.*
Inconnus.	*Chelodina* + *Chelymys* ([2]).

Ayant décrit plusieurs *Émydes* fossiles (*Thalassemys, Tropidemys*), Rutimeyer observe que ces espèces, tout en appartenant aux *Emydes* ([3]), dans le sens large du mot, se rapprochent plus des *Chélydroïdes*, mais conservent encore des caractères plus embryonnaires que ce groupe et des affinités avec les tortues marines, et il les place provisoirement entre les *Chélonées* et les *Chélydroïdes*, sous le nom de *Thalassémydes.*

Rutimeyer a établi encore un autre groupe provisoire, les *Chélonémydes*, pour les espèces éocènes de *Chelone* décrites par Owen, parce que leur plastron et leur carapace sont beaucoup plus ossifiés que dans les Thalassites actuels et qu'ils se soudaient *peut-être* plus tard et même au moyen de pédoncules axillaires et inguinaux. La place de ces animaux lui semble douteuse, parce qu'on ne connait pas encore leurs membres.

La classification de Rutimeyer pourrait donc se résumer comme suit :

Trionychida.
Chersites.
Thalassites (*Sphargis* compris).
Chélonémydes.
Thalassémydes.
Élodites { Cryptodères. / Pleurodères.

([1]) *Ueber den Bau*, etc., p. 20.

([2]) Agassiz, dans son grand ouvrage, p. 339, en note, donne le parallélisme suivant :

Chelydroïdes.	Chelyoïdes.
Cinosternoïdæ.	*Sternothærvïdæ.*
Vraies *Émydes.*	*Pelomedusa* + *Pentonyx.*

([3]) *Émydes* = *Cryptodères*, Dum. et Bib.

Paul Gervais.

Paul Gervais termine son mémoire [1] sur le *Sphargis* par la considération suivante : « Tout en appartenant bien, comme les *Chélonées*, à l'ordre des *Chéloniens*, le genre *Sphargis* ne saurait être classé dans la même famille qu'elles. Il doit évidemment constituer un groupe à part, ainsi que l'ont déjà admis quelques auteurs, particulièrement MM. Gray (1825), Fitzinger et Cope.

» Cette manière de considérer le genre Sphargis s'appuie sur plusieurs faits importants tirés de la considération du squelette. Tels sont la conformation du crâne, l'état rudimentaire de la carapace proprement dite qui se trouve réduite à la plaque étoilée propre à la région cervicale, l'apparence du plastron et la présence d'une carapace supplémentaire formée par les nombreuses pièces osseuses, articulées les unes aux autres par engrenage, dont la réunion a fait donner à cette espèce le nom de *Luth.* »

Dans son cours d'histoire naturelle (Paris, 1875), il divise les Chéloniens en cinq familles :

1° Les tortues véritables ou Chéloniens terrestres ;

2° Les Émydes ;

3° Les Trionyx ;

4° Les Thalassochéliens ou Chéloniens marins ;

5° Les Sphargis ou Luths, dont la boîte osseuse est formée de petites pièces polygonales et n'adhère pas au squelette thoraco-abdominal.

Il est étonnant qu'il n'ait point parlé des Chélydes.

Huxley.

Huxley [2] suit la classification de Duméril et Bibron ; nous la

---

(1) P. Gervais, *Ostéologie du Sphargis Luth*. Nouvelles archives du Muséum, t. VIII, p. 224.

(2) Huxley, *Éléments d'anatomie comparée des Vertébrés*. Paris, 1875, p. 217.

citons parce qu'il a modifié les noms des groupes fondamentaux de cet ordre.

1° *Testudinea;*

2° *Emydea*, avec les deux subdivisions de Duméril;

3° *Trionychoidea;*

4° *Euereta* ou tortues marines.

Seeley (1).

Intéressantes sont aussi les raisons sur lesquelles Seeley base sa division des tortues en trois groupes : « It will readily occur to any one familiar with the Chelonia that the type which is represented by *Sphargis* and *Psephophorus*, differs from all the other members of the order, not only in having the ribs entirely separate from the carapace, but also in the fondamental plan upon which the representative of the carapace itself is constructed; and I believe that we have here an indication of a primary division of the Chelonia to which palœontological discoveries may hereafter give more importance than can at present be claimed for it. From the point of view of evolution, it may fairly be anticipated that the pavement-shielded type of Chelonian preceded that in which the dorsal shield is formed of symmetrical bones. Perhaps the most remarkable character in the dermal skeleton of Sphargis is the fact that the bones of the plastron, although only forming an outer ring to the ventral surface, are already defined and homologous with those of the ordinary Chelonian, in which the carapace is specialized. And this leads me to draw attention to the fact that the dermal bones of Sphargis, which may be detected without difficulty on the dorsal surface of any ordinary shield, are altogether invisible on the interior side of the shield, which was in contact with the neural arches of the dorsal vertebrae and the slender flattened ribs; so that it is quite evident that the ordinary carapace of a Chelonian is in no way

(1) Seeley, *Note on Psephophorus polygonus*. Quarterly Journal of the Geological Society. August, 1880, p. 406.

represented by the dermal skeleton of Psephophorus or Sphargis. ..... The granulation on the shield of *Trionyx*, on such a view, indicates dermal bones like those of *Sphargis* — which were originally separate, but have been corneblended with the bony elements which were subsequently developed beneath them. The costal plates are said to be always distinct from the ribs in the young turtle when first hatched. They are certainly very small in the young of some of the Trionychidæ, in which, indeed, they remain throughout life but partly united with the endoskeleton. It is the impossibility of logically accounting for the development of the Chelonian carapace without the aid of this hypothesis that leads me to attach more than ordinary importance, in a classificational point of view, to the characters presented by *Psephophorus*. » — P. 412 : « The characters of the carapace indicate three primary divisions of the Chelonian order : First, the

Aspidochelyidæ, comprising Turtles, Emydions and Tortoises, in which the symmetrical bony carapace is covered with symmetrical horny scuts; secondly, the

Peltochelyidæ, including the Trionychidæ, in which the symmetrical bony carapace has a granular surface-structure, and is covered by an undivided dermic substance without scut; and thirdly the

Dermatochelyidæ, represented by the Sphargididæ, in which the carapace is not developed, but is represented by a bony skeleton within the skin, resembling a tesselated pavement. »

Cope.

Dans une longue suite de travaux, Cope ([1]), l'illustre et infatigable professeur de Philadelphie, qui a tant contribué au

---

([1]) *a)* COPE, *On Euclastes, a genus of extinct Chelonidæ.* PROC. ACAD. NAT. SC. PHILADELPHIA, 1867, p. 39.

b) ID., *On the Homologies of some of the cranial bones of the Reptilia*, etc. AMER. ASSOC. FOR ADVANCEMENT OF SCIENCE, t. XIX, 1871, p. 233. (Athecæ.)

c) ID., *Synopsis of the extinct Batrachia, Reptilia and Aves of N. A.* TRANS. AM. PHIL. SOC. PHILADELPHIA, 1871, 235.

progrès de l'ostéologie et de la systématique des Vertébrés, a abordé l'étude des Chéloniens et il a modifié considérablement les classifications proposées.

Il réunit en un groupe indépendant le *Sphargis* et ses congénères fossiles, sous le nom d'*Athecæ*. Avant lui, Gray (1825) en avait fait une famille, mais subordonnée aux *Gymnopodes;* Bell, une famille dans les *Pinnata;* Gray, une famille dans les *Oiacopodes;* Agassiz, une famille de ses *Chelonii*. Cope est donc le premier qui (en 1870) a détaché de tous les Chéloniens cette famille indépendante, non subordonnée à une autre division primordiale des Chéloniens, ce que Seeley a également fait dix ans, et P. Gervais cinq ans après lui.

Les autres Chéloniens sont subdivisés en deux groupes : les *Pleurodira* et les *Cryptodira*, selon que le bassin est soudé ou non au plastron (1).

Dans son volumineux ouvrage *The Vertebrata of the Tertiary Formations of the West*, 1883, p. 111, il donne le synopsis suivant des *Cryptodères :*

I. Plastron not articulated to the carapace, but presenting to it more or less open digitations : DACTYLOSTERNA.

A. Phalanges of anterior limb without condyles, and covered by a common integument; eight pairs of costal bones. . . . . *Cheloniidæ*.

---

d) ID., *Description of the genus Protostega*. AM. PHILOS. SOC, mars 1872.

e) ID., *Check-list of the North American Batrachia and Reptilia*. BULLETIN N. S. NATIONAL MUSEUM, 1875, n° 1, p. 16.

f) ID, *Contribution to the history of the Vertebrata of the Lower Eocene of Wyoming*, etc. AM. PHILOSOPH. SOC, 1881, pp. 143 sqq.

g) ID., *The Reptiles of the American Eocene*. AM. NATURALIST, 1882, p. 279.

h) ID., *Report of the United States geological survey of the Territories*, vol. III. — *The Vertebrata of the tertiary formations of the West*. Washington, 1883 (p. 115, arbre phylogénétique). Le titre extérieur de cet ouvrage porte la date de 1884.

i) ID., *Report of the extinct Vertebrata obtained in New-Mexico*, 1887.

(1) Les *Pleurodira* de Cope correspondent parfaitement aux *Élodites pleurodères* de Duméril et Bibron; mais les *Cryptodira* de Cope ne correspondent pas aux *Élodites cryptodères* des auteurs de l'*Erpétologie;* ce terme a reçu une signification beaucoup plus étendue.



B. Phalanges of anterior limb without condyles; nine or more costal bones . . . . *Propleuridæ.*

C. Phalanges of anterior limb with condyles; digits inclosed in distinct integuments; eight costal bones; sternal elements united by digitations and inclosing fontanelles; caudal vertebræ procœlous . . . . *Trionychidæ.*

D. Phalanges of anterior limbs with condyles; digits distinct; eight costal bones; sternal elements united by suture and inclosing no fontanelles; caudal vertebræ opisthocœlous . . . . *Chelydridæ.*

II. Plastron uniting with the costal bones of the carapace by suture, with ascending axillary and inguinal buttresses. (Feet ambulatory) : Clidosterna.

A. Intersternal bones present :

No intergular scuta . . . . *Pleurosternidæ.*
Intergular scuta; caudal vertebræ opisthocœlous . *Baënidæ.*

B. No intersternal bones :

a) Intergular scuta.

A mesosternal bone . . . . *Adocidæ.*

b) No intergular scuta.

A mesosternal bone; three series of phalanges . . *Emydidæ.*
No mesosternal bone; three series of phalanges . . *Cinosternidæ.*
A mesosternal bone; two series of phalanges. . . *Testudinidæ.*

III. Plastron uniting with the marginal bones of the carapace by straight suture only. (Feet ambulatory) : Lysosterna.

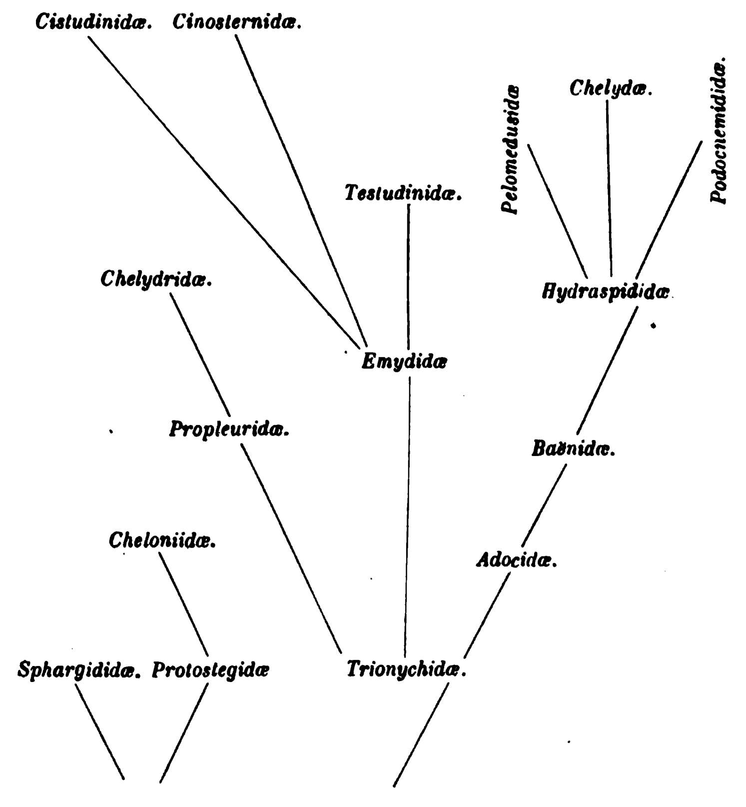
No intersternal bone nor intergular scutum; a mesosternal bone and three series of phalanges . . *Cistudinidæ.*

Cope divise les *Pleurodères* en quatre familles :

a) Les *Hydraspididæ*,
b) Les *Pelomedusidæ*,
c) Les *Chelydidæ*,
d) Les *Podocnemididæ*,

et le naturaliste de Philadelphie considère les premiers comme la souche des trois autres familles.

Dans son grand ouvrage cité ci-dessus, page 115, Cope donne l'intéressant tableau ou arbre phylogénétique suivant :



Ce tableau phylogénétique montre que Cope admet que les tortues actuelles sont sorties de deux souches différentes, d'un côté les *Athecæ* avec les *Cheloniidæ*, de l'autre le reste des tortues.

Dollo.

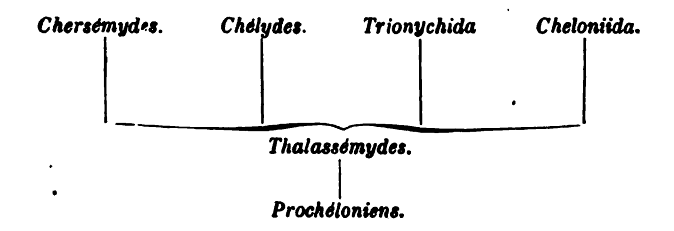
Dans un grand nombre (1) de notes paléontologiques, M. Dollo a eu l'occasion de traiter la systématique des Chéloniens.

---

(1) *a*) L. Dollo, *Première note sur les Chéloniens de Bernissart.* Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique, t. III, p. 63.
b) Id., *Première note sur les Chéloniens du bruxellien.* Ibid., t IV, p. 75.

Dans sa notice sur les tortues de Bernissart, l'auteur adopte la classification de Strauch à laquelle il ajoute la famille des *Thalassémydes*, qu'il définit : « Chéloniens avec une carapace et un plastron de Cheloniidæ et des membres de Testudinida », et dans laquelle il range des *Chersémydes* et des *Chélydes*, et renfermant, comme les *Testudinida* de Strauch, des types avec les muscles temporaux protégés par une voûte osseuse (*Eurysternum*) et des types avec des muscles temporaux simplement recouverts par la peau. Les Thalassémydes sont considérés comme les ancêtres des Chéloniens subséquents.

Le tableau suivant, emprunté à l'auteur, résume ces considérations :



Dans le travail sur les Chéloniens du bruxellien, M. Dollo adopte, tout en les modifiant, les vues de Cope.

1° « Bien qu'on ne connaisse point actuellement, au moins avec certitude, de Chéloniens pourvus de dents (? *Macelognatha*), il est indiscutable, comme le montre la comparaison avec d'autres groupes (les oiseaux, notamment), que les tortues édentées proviennent de formes dentifères. C'est d'ailleurs ce que confirme l'embryologie, car les embryons de *Trionyx* possèdent des dents rudimentaires. On pourrait donner à ce stade de l'évolution des Chéloniens le nom de *Prochéloniens*, ou, pour

c) Id., *Première note sur les Chéloniens landéniens*. Ibid., t. IV, p. 129.

d) Id., *Première note sur les Chéloniens oligocènes et néogènes de la Belgique*. Ibid., t. V, p. 59.

e) Id., *Sur le genre Euclastes*. Annales de la Société géologique du Nord, t. XV, 1888, p. 144.

f) Id., *On the humerus of Euclastes*. Geolog. Magaz., vol. V, n° 6, 1888, p. 261.

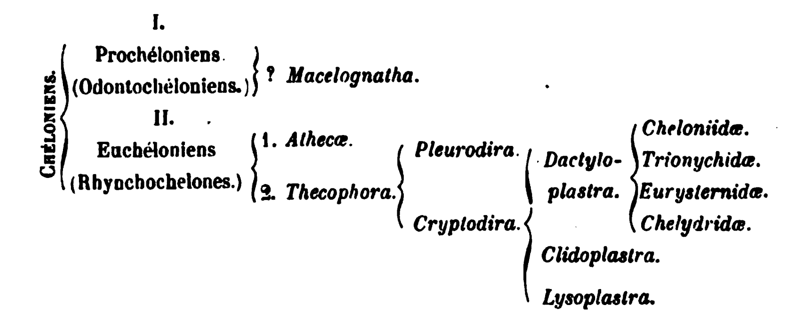
construire un mot plus semblable à celui créé par le professeur Marsh pour les oiseaux dentés : *Odontochelones*... Par opposition aux *Prochéloniens* ou *Odontochelones*, il conviendrait peut-être de désigner les Chéloniens proprement dits par les termes d'*Euchéloniens* ou *Rhynchochelones*. »

2° Il adopte la division *Athecæ* proposée par Cope, « attendu qu'elle correspond à un autre stade de l'évolution des tortues : celui où la carapace n'était pas encore constituée par des ossifications endosquelettiques et exosquelettiques combinées.

» Si l'on adopte le groupe des Athecæ, il y aurait lieu, me semble-t-il, de lui opposer tous les autres Euchéloniens sous le nom de *Thecophora*. »

3° Enfin, il divise les Thecophora en *Cryptodira* et *Pleurodira*, comme Cope, et il admet les subdivisions du professeur de Philadelphie, excepté qu'il abandonne la famille des *Propleuridæ* et crée pour les Thalassémydes (Cryptodères) la famille des *Eurysternidæ*.

Le tableau suivant résume ces considérations en substituant au terme *sternum* celui de *plastron*.



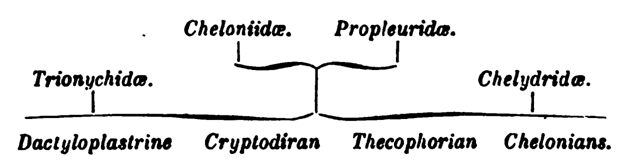
Dans la « Note sur les Chéloniens landéniens », M. Dollo divise les *Cheloniidæ* comme suit :

1° Choanes non limitées par les ptérygoïdiens réunis sur la ligne médiane : 1. *Cheloniinæ*;

2° Choanes limitées par les ptérygoïdiens réunis sur la ligne médiane : 2. *Pachyrhynchinæ*.

Plus tard ([1]), il substitue au genre et à la famille des *Pachyrhynchus*, terme déjà usité antérieurement, celui d'*Erquelinnesia*. Dans une étude récente ([2]), il identifie *Chelone* (pars), *Lytoloma*, Cope, *Puppigerus*, Cope, *Glossochelys*, Seeley, *Pachyrhynchus*, Dollo, *Erquelinnesia*, id. = *Euclastes*, Cope. Il reprend la famille des *Propleuridæ*, que M. Cope lui-même avait abandonnée, et il en complète la diagnose de la manière suivante : « Crâne très large et très plat. Fosses supratemporales complètement fermées par une voûte osseuse. Orbites plus ou moins dirigées vers le haut. Nasaux séparés. Une échancrure latéro-temporale bien marquée. Voûte palatine triangulaire très épaisse et presque de niveau avec le bord alvéolaire. Vomer très long, prolongé vers l'occiput et séparant les susmaxillaires et les palatins sur une grande étendue. Choanes situées beaucoup plus près de l'occipital que dans les *Cheloniidæ*. Ouvertures palatines pour le passage des muscles temporaux extraordinairement larges. Mandibule massive avec symphyse fort longue. Carapace arrondie en arrière. » Il faut y ajouter, d'après sa notice *On the Humerus of Euclastes*, un humérus plus *chélydroïde* que *chélonoïde*.

Dans cette dernière notice, il donne le diagramme phylogénétique suivant :



Dans la *Revue des questions scientifiques* ([3]), d'après une observation de Boulenger et Lydekker ([4]), il érige les *Pseudotrionyx* du bruxellien en une famille, les *Pseudotrionycidæ*.

([1]) L. Dollo, *Revue des questions scientifiques*, 20 juillet 1887, p. 332.

([2]) L. Dollo, *Sur le genre Euclastes*. Annales de la Société géologique du Nord, séance du 7 mars 1888, t. XV, p. 114. — Id., *On the Humerus of Euclastes*. Geological Magazine, June 1888, p. 261.

([3]) 20 juillet 1887, p. 332.

([4]) Lydekker and Boulenger, *Geological Magazine*, June 1887, p. 274.

Dans son travail sur *Psephophorus* [1], il subdivise les *Athecæ*.

ATHECÆ.	Une armure dorsale formée d'une mosaïque de petites plaques polygonales : I. *Sphargididæ*.	1. *Sphargis*. 2. *Psephophorus*. 3. *Psephoderma*.
	Non . . . . II. *Protostegidæ* [2].	1. *Protostega*. 2. *Protosphargis*.

De plus il y établit longuement la subdivision des *Rhynchochelones* en *Athecæ* et *Thecophora*, ou plutôt l'indépendance du groupe des *Athèques*.

Baur.

1° Dans un article publié dans le *Zoologischer Anzeiger* (n° 238, 1887), Baur combat la classification fondamentale de Cope et de Dollo, et essaie de démontrer que les *Athecæ* sont « am meisten Specialisirten, das heist am besten an das Wasserleben angepassten Formen der *Cheloniidæ*. » Nous aurons l'occasion dans la suite de revenir sur les arguments du perspicace naturaliste.

2° Sous le titre « Ueber die Stellung der Trionychidæ zu den übrigen Testudinata » (*Zoologischer Anzeiger*, n° 244, 1887), le même naturaliste subdivise, à son tour, les Chéloniens en deux sections fondamentales, comprenant l'une les *Trionychida*, l'autre le restant des *Chéloniens*:

Les *Trionychida* s'écartent de tous les autres Chéloniens :

a) En ce que leur entoplastron est arrondi et ne possède pas la barre médiane que l'on observe dans tous les autres Chéloniens; en ce que l'entoplastron est seul en rapport avec l'hyoplastron, et que l'épiplastron ne touche pas à l'hyoplastron.

b) En ce que, à l'exclusion de tous les autres Chéloniens, voire même de tous les autres reptiles, les costoïdes sacrées et

---

[1] *Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles*, t. V, 1888, p. 82.

[2] Ce terme a été usité en premier lieu par Cope (Cfr ci-dessus l'arbre phylogénétique de Cope).

caudales ne s'articulent qu'avec l'arc neural et non pas avec le corps des vertèbres.

c) En ce que la plupart du temps (ou toujours?) les Trionychida ont plus de trois phalanges aux doigts 4 et 5 (le doigt 4 a souvent cinq phalanges et le doigt 5 en a quatre).

Enfin l'état rudimentaire ou l'absence complète des chevrons démontre encore la grande spécialisation de ces animaux.

On a donc, d'après Baur :

Testudinata. . . { *Diacostoïdea* (*Trionychida*).
Paradiacostoïdea (tous les autres Chéloniens).

3° Dans la même notice ([1]), Baur divise les *Pleurodira* en deux groupes, auxquels il n'assigne pas de nom.

1° Le premier comprenant les *Podocnemididæ*, *Pelomedusidæ*, *Sternothæridæ* de Cope, dont les représentants sont caractérisés :

a) La seconde vertèbre cervicale est biconvexe.

b) Tous ont mésoplastron.

c) Tous ont les muscles temporaux protégés par une voûte osseuse.

2° Le second groupe, comprenant les *Chelydidæ*, Gray, et les *Hydraspididæ* de Cope, caractérisé :

a) Les 5° et 8° vertèbres cervicales sont biconvexes.

b) Absence de mésoplastron.

c) Absence de voûte osseuse protégeant les muscles temporaux, ou voûte atrophiée.

[Depuis l'envoi de notre mémoire, l'infatigable professeur de New-Haven a publié plusieurs notices ([2]) d'un haut intérêt sur les tortues.

1° Dans une notice tout à fait récente (*Zoologischer Anzeiger*), M. Baur fait observer que les *Pleurodira* vivantes sont également *diacostoïdes*. Pour ce motif, il désigne les *Trionychides :*

([1]) Cette notice est datée du 5 décembre 1886.

([2]) *Zoologischer Anzeiger*, 1888, pp. 44, 417, 592, 736. — *Ibid.*, 1889, pp. 40 et 238. — *Biologisches Centralblatt*, 1889, t. IX, pp. 149 et 181.

« die bis jetzt eine ganz isolirte Groupe darstellen », sous le nom de *Chilotæ*, Wiegm.

2° Pour *Proganochelys Quenstedtii* (1), Baur crée une famille nouvelle de Pleurodères, à laquelle il assigne les caractères suivants : carapace et plastron complètement ossifiés; plastron en rapport avec les *peripheralia* seulement et n'atteignant pas les *pleuralia*. Ilium soudé à la carapace; pubis soudé au plastron.

3° Essai d'une classification des *Pleurodères typiques* d'après le même.

Caractères des Pleurodères typiques : Intergulaire présente; plastron uni plus ou moins à la carapace; bassin uni par suture avec la carapace et le plastron.

Elles se divisent en deux groupes, comprenant chacun diverses familles.

GROUPE I. — *Mesoplastralia.*

Caractères : Mésoplastron, cervicale absente.

Famille 1. — *Pleurosternidæ :* Neuralia bien développés, les *pleuralia* ne se rencontrent pas sur la ligne médiane ; deux postneuralia; mésoplastron complet; plastron en rapport avec la carapace par des pédoncules de l'hyo- et de l'hypoplastron. Inframarginalia.

Famille 2. — *Sternothæridæ :* neuralia incomplet; pleuralia 7, 8 et 1 se rencontrent sur la ligne médiane; une postneurale; mésoplastron complet. Hypoplastron seul en contact avec la pleurale 5 ; hypoplastron en contact seulement avec les peripheralia; pas d'inframarginalia; voûte temporale bien développée; la seconde vertèbre biconvexe; les suivantes procœles. Genre : *Sternothærus.*

Famille 3. — *Pelomedusidæ :* Neuralia incomplets ; une postneurale; mésoplastron incomplet (c'est-à-dire mésoplastrons non en contact sur la ligne médiane). Hyoplastron et hypoplastron réunis par suture avec les pleuralia 1 et 5. Les autres caractères, comme dans la famille précédente. Genres : *Podocnemis, Peltocephalus, Pelomedusa, Taphrosphys.*

Cette tortue a été exhumée du Keuper supérieur du Wurtemberg (Cfr *Bericht über die XX Versammlung des oberrheinischen geologischen Vereins.* Stuttgart, 1887, p. 18).

Groupe II. — *Amesoplastralia.*

Pas de mésoplastron ; cervicale présente.

Famille 1. — *Plesiochelydidæ :* Neuralia bien développés ; pleuralia ne se rencontrant pas dans la ligne médiane ; 2 à 3 postneuralia ; carapace en contact avec le plastron ; intergulaire double ; inframarginalia ; ischium libre du plastron. Genres : *Plesiochelys* et *Craspedochelys.*

Famille 2. — *Chelydidæ :* Neuralia présents ou absents (7 — 0) ; une postneurale ; carapace et plastron plus ou moins intimement soudés. (Voûte temporale absente, cervicales 5 et 8 biconvexes.) Genres : *Chelys, Platemys, Hydromedusa, Chelodina, Emydura, Elseya, Enchelymys.*

Ultérieurement (*Zoologischer Anzeiger*, 1888, page 738), M. Baur introduit de nouvelles modifications dans la classification des *Pleurodères.*

Il sépare *Pelomedusa* des *Pelomedusidæ,* auxquelles il donne le nom de *Podocnemididæ,* et le place avec *Sternothærus* dans les *Sternothæridæ.*

Sternothæridæ.

Crâne analogue à celui des *Chelydidæ.* Prooticum visible à la base du crâne. Les expansions postérieures aliformes des ptérygoïdiens rudimentaires. Suture entre les éléments dentaires de la mandibule longtemps visible. Ongles 5,5. Premier intercentre coossifié complètement avec le corps de l'atlas, ce qui donne à l'atlas une forme amphicœle. *Sternothærus, Pelomedusa.*

Podocnemididæ.

Prooticum non visible à la base du crâne ; expansions postérieures aliformes des ptérigoïdiens, en dessous desquelles il y a une large fontanelle conduisant dans la cavité crânienne. Éléments dentaires déjà soudés dans les jeunes animaux. Premier intercentre libre. Les éléments entourant le condyle de la man-

dibule se coossifient très tôt. *Podocnemis, Erymnochelys, Peltocephalus.*

Le tableau suivant résumera la classification de M. Baur :



4° *Dermatemydidæ*, Baur.— Cope [1] place *Dermatemys* dans les *Emydidæ;* Boulenger [2], dans son groupe étendu des *Testudinidæ;* Gray [3] en fait une famille spéciale, les *Dermatemydæ.*

Baur [4] en fait également une famille spéciale sous le nom de *Dermatemydidæ*, qu'il caractérise comme suit :

Neuf éléments au plastron; pièce nuchale avec des prolongements costoïdes. Écailles cornées. Vertèbres caudales procœles. La deuxième cervicale est seule biconvexe; la huitième procœle; les dernières cervicales avec une double surface articulaire. Trois phalanges au cinquième doigt de la main. Inframarginalia bien développés. Genre : *Dermatemys.*]

Boulenger.

Il n'y a pas probablement, dit Boulenger [5], dans toute la classification des reptiles, une division aussi naturelle des Chéloniens (si l'on exclut les *Athecæ* et les *Trionychidæ*) que celle en *Cryptodères* et en *Pleurodères.*

Aux caractères généralement donnés aux *Pleurodères*, il ajoute : « The mandible articulates with the skull by a condyle fitting into a concavity of the quadrate; the outer border of the

---

(1) COPE, *The Vertebrata of the Tertiary Formations*, etc., p. 113.

(2) BOULENGER, *Encyclopædia brit.*, vol. XXIII, 1888, p. 457.

(3) GRAY, *Supplement to the Catalogue*, etc., 1870, p. 49.

(4) BAUR, *Zoologischer Anzeiger*, 1888, p. 594.

(5) BOULENGER, *On the Characters of the Chelonian Families Pelomedusidæ and Chelydidæ*. ANNALS AND MAGAZINE OF NATURAL HISTORY, May 1888, p. 346.

tympanic cavity is completely encircled by the quadrate; the pterygoïds are extremely broad throughout and form wing-like lateral expansions; the cervical vertebræ have transverse processes, and their cup-and-ball articulations an single throughout. »

Il divise les Pleurodira en trois familles :

1° *Pelomedusidæ* (= Pelomedusidæ + Peltocephalidæ de Gray) : Plastral bones eleven, mesoplastrals being present. A bony temporal arch; quadratojugal present; præfrontal in contact; no nasals; palatines in contact; dentary single. Second cervical vertebra biconvex. *Neck completely retractile within the shell.*

2° *Chelydidæ* (= Chelydidæ + Hydraspididæ de Gray) : Plastral bones nine. No bony temporal arch, the quadratojugal being absent; præfrontals separated throughout; nasals present, except in *Chelys;* palatines separated by the vomer; dentary bones distinct. Fifth and eighth cervical vertebræ biconvex. *Neck bending under the margin of the carapace, always exposed.*

3° *Carettochelydidæ* (1) : « Characterized by the absence of dermal shields on the shell and the paddle-shapedlimbs. » La seule espèce contenue dans cette famille n'est encore connue aujourd'hui que par ses caractères extérieurs, mais elle se rattache étroitement aux *Chelydidæ*.

Comme le lecteur l'observe et comme M. Boulenger le dit d'ailleurs, les deux premières familles ont été indiquées d'abord par M. Baur. M. Boulenger a eu le mérite d'en donner une diagnose complète.

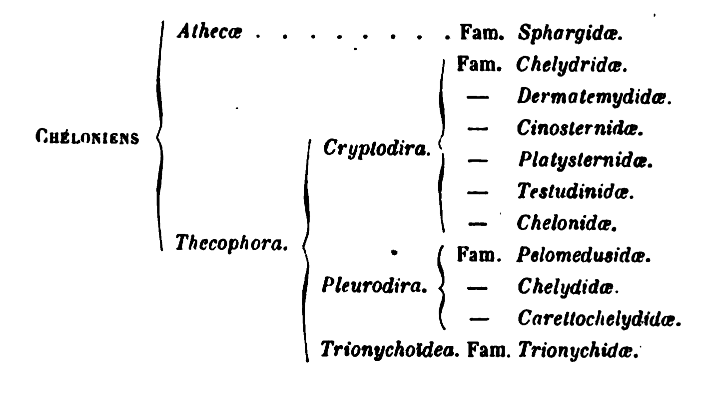
[Dans un travail récent, M. Boulenger (2) a donné une classification complète des animaux de cet ordre, en considérant surtout les espèces vivantes. M. Dollo (3) en a fait un excellent résumé dans la *Revue des questions scientifiques*.

(1) Boulenger, *On a new Family of Pleurodiran Turtles.* Annals and Magaz. Nat. Hist., 1887, vol. XIX, p. 170.

(2) G. A. Boulenger, *Catalogue of the Chelonians, Rhynchocephalians and Crocodiles in the British Museum* (*Natural History*). New edition. London, 1889.

(3) L. Dollo, *Revue des questions scientifiques,* 20 avril 1889, p. 666.

Le tableau suivant résume la classification du savant naturaliste du British Museum :



CHÉLONIENS	*Athecæ*	. . . .	Fam. *Sphargidæ.*
	Thecophora.	*Cryptodira.*	Fam. *Chelydridæ.*
			— *Dermatemydidæ.*
			— *Cinosternidæ.*
			— *Platysternidæ.*
			— *Testudinidæ.*
			— *Chelonidæ.*
		Pleurodira.	Fam. *Pelomedusidæ.*
			— *Chelydidæ.*
			— *Carettochelydidæ.*
		Trionychoidea.	Fam. *Trionychidæ.*

Nous donnerons, en suivant l'analyse de M. Dollo, la diagnose des différents groupes, d'après M. Boulenger.

I. *Athèques :* Vertèbres et côtes indépendantes de la carapace; crâne sans apophyses descendantes du pariétal. Ils ne renferment actuellement qu'une famille, les *Sphargidæ :* membres en forme de rames, sans ongles; phalanges sans condyles; carapace en mosaïque. Huit éléments au plastron; l'entoplastron absent. Une espèce : *Dermochelys coriacea.*

II. *Thecophora :* Vertèbres dorsales et côtes immobiles étalées pour former une carapace. Pariétaux avec une apophyse descendante vers les ptérygoïdiens dont ils sont séparés par la columelle.

A. *Cryptodira :* La flexion du cou se fait dans un plan vertical. Vertèbres cervicales dépourvues presque complètement d'apophyses transverses. Le centre de la dernière vertèbre cervicale articule avec le centre de la première dorsale. Mandibule avec cavité articulaire. Bord externe de la cavité tympanique incomplètement ossifié. Ptérygoïdes étroits au milieu et se joignant sur la ligne médiane. Bassin non soudé à la carapace et au plastron. Les doigts n'ont pas plus de trois phalanges. Les épiplastrons sont en contact avec les hyoplastrons. Quand l'entoplastron existe, il est ovale, rhomboïdal ou en forme de *T.* Série complète d'os marginaux en relation avec les côtes.

B. *Pleurodira :* La flexion du cou se fait dans un plan horizontal. Vertèbres cervicales avec de fortes apophyses transverses, sans articulations ginglymoïdes. Centre de la dernière vertèbre cervicale articulé avec le centre de la première dorsale. La mandibule possède un condyle articulaire s'adaptant dans une excavation de l'os carré. Bord externe de la cavité tympanique complètement ossifié. Ptérygoïdes très larges, en contact sur la ligne médiane. Bassin soudé à la carapace et au plastron. Les doigts n'ont pas plus de trois phalanges. Épiplastrons en contact avec les hyoplastrons. Entoplastron oval ou romboïdal. Série complète d'os marginaux en relation avec les côtes.

C. *Trionychoïdea :* La flexion du cou se fait dans un plan vertical. Vertèbres cervicales sans apophyses transverses. Dernière cervicale articulée à la première dorsale par les zygapophyses seulement. Mandibule pourvue de cavités articulaires. Bord externe de la cavité tympanique incomplètement ossifié. Ptérygoïdes séparés sur la ligne médiane; basisphénoïde atteignant les palatins. Le bassin n'est soudé ni à la carapace, ni au plastron. Quatrième doigt avec quatre ou plus de phalanges. Épiplastrons séparés des hyoplastrons par un entoplastron en forme de *V* dont la pointe est dirigée vers la tête. Os marginaux absents ou rudimentaires, non en relation avec les côtes.

A. *a*) *Chelydridæ :* Plaque nuchale avec de longues apophyses costiformes s'étalant sous les marginales. Carapace et plastron couverts d'écailles cornées. La plupart des vertèbres caudales opisthocœles. Cou complètement rétractile dans l'armure osseuse. Région temporale incomplètement protégée par une voûte osseuse. Pas d'arcade pariéto-squamosale. Doigts modérément allongés. Phalanges avec condyles. Ongles, 4 ou 5. Genres : *Chelydra* et *Macroclemmys.*

b) *Dermatemydidæ :* Plaque nuchale comme les *Chelydridæ.* Plastron avec 9 os. Écailles cornées. Vertèbres caudales procœles. Cou incomplètement rétractile. Région temporale non protégée par une voûte osseuse. Pas d'arcade pariéto-squamosale. Doigts modérément allongés. Phalanges avec condyles. Ongles : 4 ou 5. Genres : *Dermatemys, Staurotypus* et *Claudius.*

c) *Cinosternidæ :* Plaque nuchale comme dans les deux familles précédentes. Entoplastron absent. Carapace avec écailles cornées. Vertèbres caudales procœles. Cou complètement rétractile dans la carapace. Région temporale non protégée par une voûte osseuse. Pas d'arcade pariéto-squamosale. Doigts modérément allongés. Phalanges avec condyles. Ongles, 4 ou 5. Genre : *Cinosternum.*

d) *Platysternidæ :* Plaque nuchale sans apophyses costiformes. Plastron avec 9 pièces. La plupart des vertèbres opisthocœles. Cou complètement rétractile. Région temporale non protégée par une voûte osseuse. Pas d'arcade pariéto-squamosale. Doigts modérément allongés. Phalanges avec condyles. Ongles, 4 ou 5. Genre : *Platysternum.*

e) *Testudinidæ :* Plaque nuchale sans apophyses costiformes. Plastron avec 9 os. Carapace avec écailles cornées. Vertèbres caudales procœles. Cou complètement rétractile. Arcade temporale ordinairement présente. Pas d'arcade pariéto-squamosale. Doigts courts ou modérément allongés. Phalanges avec condyles. Ongles, 4 ou 5. Genres : *Kachuga, Callagur, Batagur, Hardella, Morenia, Chrysemys, Ocadia, Malacoclemmys, Damonia, Bellia, Clemmys, Emys, Cistudo, Nicoria, Cyclemys, Geomyda, Cinixys, Pyxis, Homopus* et *Testudo.*

Chelonidæ : Plaque nuchale sans apophyses costiformes. Plastron avec 9 os. Écailles cornées. Vertèbres caudales procœles. Cou incomplètement rétractile. Vertèbres cervicales courtes et ordinairement articulées par amphiarthrose. Région temporale complètement protégée par une voûte osseuse. Pariétaux en contact avec les squamosaux. Membres en rames. Phalanges sans condyles. Un ou deux ongles. Marines. Genres : *Chelone* et *Thalassochelys.*

B. *a*) *Pelomedusidæ :* Onze os plastraux (mésoplastrons présents). Écailles cornées. Cou complètement rétractile. Seconde vertèbre du cou biconvexe. Arcade temporale osseuse présente. Arcade pariéto-squamosale manquant. Os palatins réunis sur la ligne médiane. Pas d'os nasaux. Préfrontaux en contact sur la ligne médiane. Éléments dentaires simples. Doigts modérément

allongés. Ongles, 4 ou 5. Genres : *Sternothærus*, *Pelomedusa* et *Podocnemis*.

b) *Chelydidæ :* 9 os au plastron. Écailles cornées. Cou incomplètement rétractile. Cinquième et huitième cervicales biconvexes. Pas de voûte temporale osseuse; en général, une arcade pariéto-squamosale. Palatins séparés par le vomer. Os nasaux généralement présents. Préfrontaux séparés l'un de l'autre. Éléments dentaires distincts. Doigts modérément allongés. Ongles, 4 ou 5. Genres : α) *Chelys*, *Hydromedusa* et *Chelodina ;* β) *Rhinemys*, *Hydraspis*, *Platemys*, *Emydura*, *Elseya* (¹).

c) *Carettochelydidæ :* Pas d'écailles cornées. Plastron avec 9 os. Membres en rames. Doigts très allongés; les deux internes seuls possèdent des ongles. Cou non rétractile. Un genre : *Carettochelys*.

C *Trionychidæ :* Pas d'écailles cornées. Lèvres charnues. Museau terminé en trompe. Tête et cou rétractiles. Tympan caché. Trois doigts internes ont seuls des ongles. Genres : α) *Trionyx*, *Pelochelys*, *Chitra ;* β) *Cycloderma*, *Emyda*, *Cyclanorbis*.

« La classification de ce naturaliste, ajoute M. Dollo, est basée sur l'examen de 1665 spécimens du British Museum, sans parler des collections étrangères consultées. Il ne s'agit donc pas ici d'un travail hâtif, mais d'une œuvre basée sur une expérience consommée. »]

III. *Relation des Chéloniens avec les autres Vertébrés.*

Avant d'établir et de discuter les divisions des Chéloniens, il est nécessaire de rechercher les relations de ces animaux avec les autres ordres de reptiles et les autres vertébrés, relations qui pourraient peut-être servir de guide dans la systématique.

Blainville (²), en 1816, trouvait une assez grande affinité

(¹) Les trois premiers genres ont le cou plus long que le tronc et des mâchoires faibles; ceux du type β ont le cou moins long que le tronc.

(²) *Bulletin de la Société philomathique*, 1816, p. 111.

entre les Chéloniens et les Crocodiliens pour désigner ces derniers sous le nom d'*Émydosauriens*.

Duméril et Bibron (1) partagent la même opinion sur les affinités de ces deux ordres : « Quelques Sauriens (2) cependant, comme les crocodiles, disent-ils, semblent lier les deux ordres (Chéloniens et Sauriens) par plusieurs ressemblances dans l'organisation et les mœurs et surtout par les parties destinées à la reproduction ; en outre, quelques Chéloniens, à cou très gros et à queue très longue, comme l'*Émysaure* et les *Chélydes*, semblent former un anneau de cette liaison. »

M. Van Beneden dit (3) : « Nous ne pouvons nous défendre de l'idée que c'est par les crocodiles que les tortues doivent passer pour entrer dans le plan général et que ce passage doit s'effectuer par les *Sphargis* et par les *Trionyx*. »

Swainson, comme nous l'avons vu dans sa classification, adopte les vues de Duméril et Bibron ; il rattache les Chéloniens aux Crocodiliens par *Chelydra*, *Platysternæ*, *Chelys*, qu'il désigne sous le nom de *Crocodile Tortoises*.

Huxley (4) les rapproche des amphibiens : « Les tortues sont les reptiles qui approchent le plus des amphibiens ».

Cope (5) réunit, sous le nom commun de *Synaptosauria*, les *Chéloniens*, les *Rhynchocephalia* et les *Sauropterygia*. Ils ont de commun le quadratum intimement uni aux os du crâne et l'articulation simple (?) des côtes.

Boulenger, dans un travail récent (6), rappelle l'opinion de Cope : « It is undeniable that all the discoveries that have been made of late give support to the view first expressed by Cope, nearly twenty years ago, on the affinities of those two groups,

---

(1) Duméril et Bibron, *op. cit.*, p. 349.

(2) Les Sauriens, d'après D. et B., comprennent *Crocodilia* + *Lacertilia*.

(3) Van Beneden, *Note sur les ossements de Sphargis trouvés dans la terre à brique du pays de Waas*. Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 3e série, t. VI, 1883.

(4) Huxley, *Anatomie comparée*, etc., p. 207.

(5) Cope, *On the evolution of the Vertebrata, progressive and retrogressive*. Amer. Nat., March 1885, p. 245.

(6) Boulenger, *On the presence of ossa transversa in a Chelonian*. Annals and Magazine of Nat. Hist., June 1888, p. 453.

the *Chelonia* and the *Rhynchocephalia*, the systematic position of which has given rise to so much controversy. »

Rutimeyer (1), de son côté, dit : Ueber die Beziehungen des so bizarren und alleinstehenden Typus des Schildkröten zu andern Gruppen von Reptilien gibt die Palœontologie einstweilen keinen weitern Aufschluss als die Gegenwart. Die Schildkröten treten, soweit sie uns bis jetzt bekannt sind, fertig geharnischt auf den Schauplatz. Von etwaigen Wurzelformen hat sich bis dahin nicht gezeigt. Ob wir uns einen Ausgangspunkt bei den Batrachiern zu denken haben, wohin etwa die ähnliche Armut in eizelnen Theilen der Wirbelsaüle und an ächten Sternalbildungen, sowie die Analogien in dem Bau von Schulter und Extremitäten weisen könnten, und unter welchen in Formationen, die hinter den ältesten bekannten Schildkröten weit zurückliegen, zwar nicht solche Curassiere, aber doch Formen bekannt sind, die ein reichlich entwickeltes Dermalschild des Schädels, einen wohl ausgebildeten Hyoidapparat und ein dermales Kehlschild, vielleicht selbst Bauchschild, in der Jugend vermuthlich auch Hornbedeckung der Kiefer trugen, darüber bewahren die bis jetzt bekannten Schildkröten das tiefste Stillschweigen (2)..... Immerhin scheinen selbst so entfernte Beziehungen mit ganocephalen und labyrinthodonten Batrachiern von tieferer Bedeutung zu sein als etwa die von Owen hier und da betonte mit *Plesiosaurus*, die sich ausschliesslich auf die ventralen Hautknochen dieser Gruppe beschränkt und wohl richtiger als blosse Parallele aufzufassen wäre. Die Entdeckung des Skeletes von Placodonten wurde hierüber vielleicht am ehesten Aufschluss bringen. »

Baur (3), au contraire, à la suite d'Owen, rapproche les tortues des *Sauropterygia*, qu'il croit issus d'un ancêtre commun, encore inconnu. Il n'admet pas l'opinion du professeur de Philadelphie

(1) Rutimeyer, *Ueber den Bau*, etc, p. 135.

(2) Die merkwürdigen Parallelen in dem Bau des Schädels von *Pipa* und *Chelys*, ajoute Rutimeyer en note, welche tiefer gehen als zur blossen Aehnlichkeit in der Physiognomie, sind wohl auch nicht ohne Bedeutung.

(3) Baur, *On the phylogenetic arrangement*, etc., p. 98.

plaçant les *Rhynchocephalia* dans un même groupe avec les tortues; les *Rhynchocephalia* sont rattachés aux *Lacertiliens*, *Pythonomorphes* et *Ophidiens*.

On ne peut nier que, parmi les reptiles vivants, les tortues ne se rapprochent plus des Crocodiliens que des représentants des deux autres : Crocodiliens et Chéloniens ont de commun :

a) Les fosses nasales réunies, à l'exclusion des autres reptiles vivants.

b) Un pénis.

c) Un sacrum composé de deux vertèbres.

d) Une peau atteignant une grande épaisseur et présentant des ossifications dermiques.

e) Des canaux péritonéaux communs.

f) Appareils digestifs et sexuels assez semblables, etc.

Mais on ne tenait pas compte de ce que ces caractères ne sont que secondaires, qu'ils se trouvent très probablement dans plusieurs fossiles d'autres ordres; de plus, il n'y a pas d'homologie, croyons-nous, entre les productions dermiques osseuses des Crocodiliens et des *Thecophora;* en outre, ils diffèrent par la structure du crâne, les vertèbres, la ceinture scapulaire, la ceinture abdominale, le cœur, les organes de la respiration. Enfin, l'histoire paléontologique démontre qu'il n'y a aucune convergence; que les *Crocodiliens* sont apparentés aux *Dinosauriens;* les plus anciens Crocodiliens se rapprochent des *Sauropodes* et des *Zanclodontidæ*, et s'écartent par conséquent des Chéloniens.

Si *Chelydra*, *Staurotypus* et *Chelys* affectent une forme extérieure rappelant plus ou moins les Crocodiliens, si même *Chelydra* ([1]) a des ossifications dans la queue, rappelant les scutes des Crocodiliens, l'opinion de Swainson ne peut cependant pas être admise; sa classification, rattachant les Chéloniens aux Crocodiliens, ne s'appuie que sur des caractères tout à fait extérieurs; le point de départ est faux. De plus, dans ses *Chelydridæ* il associe des animaux de deux groupes tout différents, des

---

([1]) Huxley, *Preliminary Note on the fossil remains of a Chelonian Reptile, etc.* Nature, April 28, 1887, p. 615.

Cryptodères et des *Pleurodères*. Passer des *Crocodiliens* aux *Chelydra* est tout à fait impossible, puisque les premiers ont déjà des membres beaucoup plus spécialisés que les seconds; de plus *Chelydra* semble être un type assez primitif, puisqu'il a deux centrales [1] dans le carpe, un dans le tarse, cinq carpales semblables. Il est tout aussi impossible de passer de *Chelydra* aux *Crocodiliens*, parce que le premier est édenté, a déjà perdu les os nasaux, les côtes cervicales, etc., caractères que les seconds ont encore conservés.

Les ressemblances lointaines avec les *Amphibiens* ne peuvent être prises en considération; personne ne contestera qu'il y a deux types d'organisation tout à fait différents; ces ressemblances fussent-elles même plus grandes, moins superficielles, il ne resterait pas moins vrai que les Chéloniens sont des reptiles très élevés en organisation, fortement spécialisés et que, par conséquent, ils ne peuvent avoir avec les amphibies qu'une parenté très éloignée; on ignore d'ailleurs complètement comment le passage aurait pu se faire entre les *Ganocéphales* et les *Chéloniens*.

Quant à l'opinion de Cope réunissant les *Testudinata*, *Rhynchocephalia* et *Sauropterygia* sous le nom de *Synaptosauria*, nous ne pouvons l'admettre, parce que :

1° Le premier caractère commun qu'il assigne à ce groupe, la soudure du quadratum aux os du crâne, se rencontre également ailleurs, notamment dans son groupe des *Archosauria*;

2° Le second caractère n'existe pas; en effet, les côtes cervicales des Chéloniens n'ont pas une tête simple [2], pas plus que celle des *Rhynchocephalia* [3] et de *Plesiosaurus* [4].

On a trouvé la columelle des Chéloniens [5]; récemment M. Boulenger [6] a rencontré également l'os transverse chez

---

(1) Baur, *Osteologische Notizen*. Zoologischer Anzeiger, n° 240, 1886.

(2) Baur, *On the phylogenetic arrangement*, etc., p. 98.

(3) Baur, *American Naturalist*, November 1886, p. 980. — Smets, *Notice sur Hatteria punctata* Muséon, n° 5, 1887.

(4) Baur, *On the phylogenetic arrangement*, p. 98.

(5) Baur, *Osteologische Notizen*. Zoologischer Anzeiger, n° 240, 1886.

(6) Boulenger, *On the presence of ossa transversa in a Chelonian*. Annals and Magazine of Nat. History, June 1888, p. 452.

Hydraspis Hilairii; ce dernier os existe aussi ailleurs; nous l'avons observé chez *Thalassochelys caouana.* Peut-on de là déduire l'affinité des *Rhynchocephalia* et des Chéloniens? Nous ne le croyons pas; on peut en déduire que les tortues, qui semblent au premier abord avoir une organisation assez différente des autres reptiles, se rapprochent de plus en plus du type des reptiles à mesure qu'elles sont mieux connues; d'ailleurs tout les reptiles n'ont-ils pas ces os ou libres, ou coossifiés avec d'autres éléments, comme semble l'indiquer l'unité de plan?

Que *Chelydra* ait deux *centralia* dans le carpe comme *Hatteria,* cela démontre que *Chelydra* a conservé un carpe primitif, comme le singulier reptile néo-zélandais.

Les affinités avec les *Sauropterygia,* pressenties par Ritgen et Owen, développées par Cope ([1]) et Baur ([2]), sont plus étendues. Pubis, ischion, fémur, humérus, vertèbres sacrées et caudales, chevrons se ressemblent dans ces deux ordres. De plus, Parker ([3]) a montré que le nombre de *myotomes,* dans la jeune *Chélonée verte,* surpasse de beaucoup celui qui existe à l'âge adulte et va en diminuant avec le développement : « This free suppression of segments, ajoute-t-il, suggests a great secular modification by shortening of a form not unlike a *Plesiosaur.* »

Malgré ces relations plus ou moins grandes, ajoute Baur, on ne connait pas les formes qui font la transition entre ces deux ordres.

De ces considérations on peut déduire que le zoologiste qui veut classer les Chéloniens doit considérer ces animaux comme formant aujourd'hui un groupe *absolument* indépendant, non relié à un autre groupe connu. Il n'en reste pas moins vrai qu'il a à tenir compte des lois qui président à l'évolution de ces animaux et des vertébrés en général.

---

(1) Cope, *On the evolution of the Vertebrata,* etc., p. 245.

(2) Baur, *On the phylogenetic arrangement,* etc, p. 98.

(3) Parker, *Report on the development of the Green Turtle* (Chelone viridis, Schn.). The Voyage of H. M. S. Challenger, Zool., vol. I, p. 47.

IV. *Histoire paléontologique des Chéloniens.*

Si l'histoire géologique de ce groupe ne nous apprend presque rien ou fort peu de chose sur l'origine de ses représentants et sur leur enchaînement avec les autres reptiles, elle révèle néanmoins quelques faits dont le naturaliste doit tenir compte pour la systématique.

A l'exception du problématique *Psephoderma* (1), du trias, les tortues font leur apparition au jurassique et, comme le dit si bien Rutimeyer (2), elles apparaissent « fertig geharnascht auf dem Schauplatz. » Ce sont même des types d'une organisation assez élevée (3), des *Émydes* et des *Chélydes* qui apparaissent en premier lieu, ce qui fait supposer que nous ne connaissons encore qu'une bien faible partie de la faune chélonienne.

En Amérique (4) apparaissent simultanément *Chelone, Emys, Platemys, Trionyx.*

Plusieurs tortues anciennes sont des formes *collectives*, réunissant certaines particularités qui se séparent complètement les unes des autres dans le cours des âges géologiques. Tels sont les *Thalassémydes* de Rutimeyer, les *Propleuridæ* de Cope, etc.

Un grand nombre de ces tortues anciennes ont une carapace et un plastron incomplets, rappelant nos tortues de mer actuelles; elles ont les muscles temporaux protégés par une voûte osseuse et de grandes orbites; en d'autres termes, elles ont des affinités multiples avec les *Chelone* actuelles (affinités un peu exagérées par Rutimeyer). Beaucoup d'autres ont des affinités plus ou moins grandes avec les *Chélydroïdes* actuelles, ces formes qui ont

(1) H. von Meyer, *Psephoderma alpinum aus dem Dachsteinkalke der Alpen.* Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geognosie, etc., 1858, p. 646.

(2) Rutimeyer, *Ueber den Bau*, etc., p. 135.

(3) [Depuis que nous avons écrit ces lignes, M Baur (*Zoologischer Anzeiger*, etc., 1888, n° 285) a fait connaître une remarquable tortue, *Proganochelys Quenstedtii*, du keuper. Sa carapace et son plastron sont complètement fermés, sans traces de fontanelles.]

(4) Leidy, *Cretac. Rept. of the United States.* Smithsonian Contributions, XIV, 1865, p. 104.

encore conservé plusieurs caractères d'ancienneté: tels sont les *Baënidæ*, les *Adocidæ* de Cope.

Les plus anciens Chéloniens semblent avoir habité non pas la haute mer, mais le littoral, les estuaires et les grands fleuves (Rutimeyer).

Les vraies tortues marines ne font leur apparition qu'à l'époque crétacée.

Les *Chélydes* apparaissent de bonne heure et présentent déjà à peu près tous les caractères des *Chélydes* actuelles; confinées aujourd'hui dans l'hémisphère sud, elles ont vécu au *secondaire* et au *tertiaire* dans l'hémisphère boréal. Ces animaux apparaissent sous deux formes : les uns avec une carapace massive, grande, très convexe; d'autres avec une carapace déprimée, mince, faiblement ossifiée. Le mésoplastron apparait aussi de bonne heure.

Les premières *Émydes*, du Jura, se rapprochent beaucoup des *Chelydra* de nos jours, c'est-à-dire de l'espèce qui a conservé un certain nombre de caractères primitifs.

Les *Trionyx* et les *Chelone* ont fait leur apparition à l'époque de la craie; les tortues terrestres, au *miocène*, tant en Europe qu'en Asie et en Amérique.

Les *Chelone*, *Chelydra* et *Trionyx* sont des espèces assez anciennes et relativement peu métaboliques, avec une distribution géographique très étendue.

Tandis que les *Émydes* et les *Chélydes* sont métaboliques, les *Chersites* sont relativement jeunes (Rutimeyer).

La persistance des *Athecæ*, Cope, depuis le crétacé et peut-être depuis le trias (*Psephoderma*) est un fait paléontologique d'une grande importance.

Un grand nombre de tortues fossiles n'ont été décrites que superficiellement; les recherches récentes de Rutimeyer, Boulenger, Lydekker (1), Cope, Dollo, etc., nous instruisent sur les véritables caractères et affinités de ces fossiles. Ainsi les *Treto-*

(1) LYDEKKER and BOULENGER, *Notes on Chelonia*. GEOLOGICAL MAGAZINE, June 1887, p. 270.

sternum (1) de sir R. Owen ont, contrairement à ce que pensait le grand naturaliste anglais, les pièces osseuses marginales bien développées. Rutimeyer (2) ne savait quelle place assigner à ce Chélonien qui se serait écarté notablement du groupe auquel il aurait dû appartenir. Nous savons aujourd'hui (3) que ses caractères lui assignent sa place parmi les *Chélydroïdes*, peut-être à côté d'*Anostira*.

Dans la nature actuelle on ne rencontre, dans les Chéloniens, une peau molle recouvrant le corps que dans les tortues fluviatiles, *Trionychida* ou Potamites, et un épiderme dur et épais comme du cuir dans le Sphargis.

Dans les tortues fossiles, il y a des *Émydes* ou *Cryptodères* (Anostira (4), Apholidemys (5), Pseudotrionyx (6)), des *Pleurodères* (Carrettochelys (7)) recouvertes d'une peau molle; et probablement *Psephophorus rupeliensis* (8) (Atheca) était couvert de plaques cornées.

Enfin, un autre fait aussi important serait l'existence d'une tortue de rivière, *Potamite*, présentant des fossettes confluentes, mais se distinguant essentiellement des espèces vivantes de ce groupe en ce qu'elle aurait la carapace couverte d'écailles; ce serait les *Trachyaspis* décrits par H. von Meyer (9), Pictet et Humbert (10), Delfortrie (11).

Delfortrie place *Trachyaspis* parmi les *Trionychida*, tandis

---

(1) *Rep. Brit. Assoc. for 1841*, pp. 165-167, 1842.

(2) RUTIMEYER, *Ueber den Bau*, etc., p. 116.

(3) LYDEKKER and BOULENGER, *Notes on Chelonia*, op cit., p. 273.

(4) LEIDY, *Contributions to the extinct vertebrate fauna of the Western Territories*, pl. XVI.

(5) POMEL, *Bull. univ. de Genève*, 1847. ARCHIVES, t. IV, p. 328.

(6) DOLLO, *Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique*, t. IV, 1886, p. 92.

(7) BOULENGER, *On a new Family of Pleurodiran Turtles*. ANN. AND MAG. NAT. HIST., 1887, t. XIX, p. 170.

(8) DOLLO, *Première note sur les Chéloniens oligocènes et néogènes de la Belgique*, etc. BULLETIN DU MUSÉE ROYAL D'HISTOIRE NATURELLE DE BELGIQUE, t. V, 1888, p. 70.

(9) H. VON MEYER, *Neues Jahrbuch für Mineralogie*, etc., 1843, p. 699.

(10) HUMBERT et PICTET, *Monographie des Chéloniens de la mollasse suisse*, p. 59.

(11) DELFORTRIE, *Les Chéloniens du miocène supérieur de la Gironde*. ACTES DE LA SOCIÉTÉ LINNÉENNE DE BORDEAUX, t. XXVII, p. 23.

que Pictet et Humbert sont moins catégoriques et les rapprochent dubitativement des *Chélonées* ou des *Trionyx* : « La côte ([1]), après son élargissement, disent-ils, se prolonge en un point libre comme chez les *Chélonées* et les *Trionyx* et rend probable l'existence de pièces osseuses marginales. Il est vraisemblable que les *Trachyaspis* sont plus voisins de ces deux genres que ne le sont les *Trelosternon*, et leur association avec les Élodites nous paraît plus douteuse. »

Rutimeyer ([2]) dit, au sujet du *Trachyaspis*, de Pictet : « Schwieriger ist die Beurtheilung von zwei ferneren Formen der Kreide-Epoche : *Trachyaspis Sanctæ-Crucis*, Pictet, aus dem canton Waadt, welche sich vielleicht als ein von Schwefelkies zerfressener Ueberrest von *Tropidemys* herausstellen dürfte. »

Tous ceux qui ont manié des ossements fossiles de Chéloniens savent que souvent les pièces costales présentent des vermiculations apparentes ayant une origine étrangère ; quelquefois même les tortues vivantes, écailleuses, telles que *Ch. mydas*, présentent des vermiculations. Avec Rutimeyer, nous croyons que les Trachyaspis ne sont pas des *Potamites*, mais appartiennent probablement à des tortues *Élodites*, comme semblent l'indiquer les fragments figurés par Delfortrie, notamment les pièces marginales.

En tout cas, jusqu'à présent on n'a pas fourni la preuve que ces animaux sont des *Trionychides*, par l'ensemble de leurs caractères.

Il ne sera pas hors de propos de rechercher si la présence

([1]) Pictet et Humbert, *op. cit.*, p 59.

([2]) Rutimeyer, *Ueber den Bau, etc.*, p 118. — Dans son ouvrage : *Die fossilen Schildkröten, etc.*, p. 147, il ajoute :

« Solche pockenartige Schalenstücke finden sich in Solothurn reichlich genug, und nicht selten ist diese Sculptur so regelmäsig, dass auch ich, bevor ich den nöthigen Ueberblick über den anatomischen Bau dieser Schalen gewonnen hatte, eine mit dieser Zeichnung in besonders regelmässiger Art versehene Schale, die als *Plesiochelys Langii* aufgeführte, auf Grund dieser Sculptur als *Plesiochelys rugosa* bezeichnete. Der weiteres Untersuchung stellte sich indess heraus, dass diese Gruben auschlieslich von der Vertheilung und Verwitterung von Schwefelkies im Gestein herrühren. »

d'un épiderme nous est un caractère primitif ou secondaire; les classifications phylogéniques seraient différentes suivant la solution donnée à cette question.

« Si l'on suit, disons-nous ailleurs ([1]), les transformations des faunes à travers les âges géologiques, on constate presque toujours que, dans l'évolution d'un groupe naturel d'êtres, ses représentants ne retournent plus à une conformation modifiée durant les époques antérieures. Ainsi, comme on l'a dit ([2]), le canon des ruminants ne se résoudra plus en ses éléments, et cet os ne retournera plus à l'état que nous montre l'Anoplotherium. Utilisant ce même argument, nous dirons que l'on ne peut supposer qu'une fois les plaques cornées acquises, elles se perdent de nouveau pour donner naissance à la disposition qu'on constate dans les *Trionyx* et le *Sphargis* : c'est donc à juste titre que M. Van Beneden dit que ces deux groupes renferment tous deux des formes *archaïques.* »

M. Dollo semble être d'un avis contraire quand il affirme ([3]) que « tous les Chéloniens ont probablement eu des plaques cornées :

Premier argument de M. Dollo : « Parce qu'elles apparaissent de très bonne heure chez les embryons de ceux qui en possèdent à l'âge adulte » ([4]). Nous opposons :

a. Il est admis que dans les premières phases du développement embryonnaire l'épiderme est mou; plus tard il se segmente et devient corné. Si l'ontogénie est la répétition de la phylogénie, même avec les restrictions nécessaires à ce principe, les premières tortues ont eu une peau molle, et plus tard seulement les plaques cornées ont fait leur apparition;

b. Utilisant l'argument, si usité aujourd'hui, qu'un animal ne peut transmettre ce qu'il a déjà perdu, nous dirons que nous ne pouvons supposer qu'une fois les écailles cornées acquises,

---

([1]) SMETS, *Les Chéloniens.* REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, avril 1887, p. 400.

([2]) L. DOLLO, *Première note sur les Chéloniens oligocènes et néogènes,* etc., *op. cit.,* p. 71 (en note).

([3]) DOLLO, *Première note sur les Chéloniens de Bernissart,* etc., p. 73.

([4]) H. RATHKE, *Entwickelung der Schildkröten,* etc., p. 150.

elles se perdent de nouveau pour retourner à la forme primitive : ce serait un retour dans l'évolution;

c. Si elles apparaissent très tôt, c'est que depuis longtemps déjà des Chéloniens ont perdu leur épiderme mou, ce qui est confirmé par la paléontologie, puisque des tortues du jurassique étaient déjà écailleuses.

Deuxième argument : « Parce que Sphargis, qui n'en a plus à l'état adulte, en montre à l'âge embryonnaire » ([1]).

Duméril et Bibron ([2]) disent : « Cette peau (de *Sphargis*), complètement nue chez les individus adultes, est revêtue, pendant le jeune âge, d'écailles tuberculeuses, les unes convexes et circulaires, les autres aplaties et polygones. »

a. L'observation de Duméril et Bibron est unique; Peeters, Strauch, P. Gervais, qui ont étudié de jeunes *Sphargis*, ne citent rien de pareil.

b. Ces écailles de Sphargis, sont-ce de véritables écailles? Sont-elles comparables aux écailles cornées des autres Chéloniens?

c. La peau épaisse, véritable cuir, des *Sphargis* n'est pas comparable à l'épiderme mou des *Trionyx*. L'observation de Duméril fût-elle exacte, fût-elle même normale, y eût-il des écailles véritables, nous pouvons nier la conclusion; il faudrait démontrer que la peau du *Sphargis* est *comparable* à celle des *Trionyx*. L'état que nous présenterait le *Sphargis* peut être une troisième étape de l'évolution de l'épiderme des Chéloniens, ce qui serait confirmé par la présence d'écailles cornées dans le *Psephophorus rupeliensis*.

Troisième argument : « Chez certains types (*Chelone Suyckerbuyki*, Ubaghs ([3])), on les surprend en train de disparaître : les séparations des diverses plaques y sont encore, mais la surface vermiculée de l'os sous-jacent nous indique qu'il était revêtu d'une peau molle; en d'autres termes, que les plaques avaient perdu leur rigidité et étaient en voie de s'en aller. »

([1]) DOLLO, *loc. cit.*, p. 71.
([2]) DUMÉRIL et BIBRON, *op. cit.*, II, p. 559.
([3]) UBAGHS, *Description géologique et paléontologique du sol du Limbourg*, 1879.

a. Ces modifications des écailles costales ne se sont-elles pas produites durant ou même après la fossilisation?

b. On ne peut admettre *à priori* que la présence de vermiculations démontre l'existence d'un épiderme mou, puisque entre les écailles cornées et la carapace osseuse il existe une membrane vasculaire, même chez les *Chersites* (¹). De plus, avec l'âge et à la suite de l'ossification, des vermiculations peuvent apparaître. Nous avons déjà dit plus haut que parfois des tortues à épiderme corné présentent ces ornementations.

Quatrième argument : « A cause du mode de reproduction de la carapace » (²). Malheureusement le travail sur lequel M. Dollo s'appuie nous est inconnu, et il ne nous a pas été possible, jusqu'à présent, de nous le procurer.

Nous croyons que l'épiderme mou est un caractère d'ancienneté et les écailles cornées un indice de spécialisation.

Cette opinion est conforme aux données de la paléontologie, puisque les rares *Cryptodères* et *Pleurodères* à peau molle (³) sont des espèces fossiles, tandis que toutes les espèces actuellement existantes de ces groupes, hormis *Carettochelys*, ont des écailles cornées.

Il est incontestable que parmi les plus anciens Chéloniens prédominent également les formes à plaques cornées, aussi bien qu'aujourd'hui (⁴), mais tout le monde doit admettre que nous ne possédons encore qu'une bien faible partie des tortues fossiles. On répondra peut-être que nous faisons appel à l'inconnu ; mais, en cette circonstance, on a le droit de le faire, puisque nous ne connaissons encore qu'imparfaitement la faune chélo-

---

(1) SMETS, *Notes sur trois Testudinidides de l'Afrique australe*. ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1886. Seconde partie, p. 6.

(2) H. GADOW, *On the reproduction of the carapace in Tortoises*. JOURNAL OF ANATOMY AND PHYSIOLOGY, janvier 1886, p. 222.

(3) Il n'est pas sans intérêt de remarquer que l'on a, parmi les *Emydidæ*, *Apholidemys* à peau molle; parmi les *Chelydridæ*, *Anostira*; parmi les *Pleurodira*, *Carettochelys*.

(4) L'opinion du R. P. Heude (*Mémoires concernant l'histoire naturelle de l'Empire chinois*, Chang-Hai, 1886), que les *Trionyx* chinoises sont aussi nombreuses que toutes les autres espèces de tortues tant vivantes que fossiles réunies, nous semble exagérée pour le moins, et en tout cas doit être confirmée.

nienne fossile, sinon ce groupe constituerait une anomalie bizarre et incompréhensible.

On ne saurait encore dire dans quel sens s'est faite l'évolution des Chéloniens : des *Trionycida*, des *Chélonées*, des *Émydes*, des *Chelydra*, des *Trionyx*, des *Chélydes*, semblent apparaître simultanément; on ne saurait dire si l'évolution est progressive ou régressive. Il semble plus ou moins probable que pour l'exosquelette elle a été progressive ([1]), en ce sens que ce dernier se développait davantage dans les *Thecophora;* au contraire, elle a été régressive pour l'exosquelette ([2]) des *Athecæ*, de Cope.

V. *Examen des classifications.*

DIVISION DES CHÉLONIENS.

Nous abordons l'examen des classifications par celles qui admettent une subdivision fondamentale des Chéloniens en deux sous-ordres.

§ 1.

Odontochéloniens ET *Euchéloniens*, DOLLO.

M. Dollo subdivise les Chéloniens en *Odontochéloniens* ou *Prochéloniens*, pourvus de dents, et *Euchéloniens* ou *Rhynchochéloniens*, édentés :

1° Nous ne connaissons encore aucun *Odontochélonien;* les *Macelognatha* ([3]) de Marsh sont des Chéloniens douteux, problématiques. Si c'étaient des Chéloniens et si leur séparation d'avec les autres représentants de cet ordre était motivée, le

---

([1]) [*Proganochelys*, Baur, semble cependant indiquer le contraire.]

([2]) Nous parlons de l'exosquelette « Thécophorien »; les anciens *Athèques* avaient un plastron plus développé, des os marginaux (?), des vestiges de pièces costales plus apparents que l'*Athèque* actuel.

([3]) MARSH, *A new order of extinct Jurassic Reptiles*. AM. SCIENT. JOURN. 1884, vol. XXVII, p. 341.

terme *Rhynchochéloniens* leur conviendrait également, puisque ces reptiles ont très probablement la partie antérieure de la mandibule et du rostre entourée d'un bec corné.

2° Nous pouvons à ces conceptions *à priori* opposer les paroles de C. Vogt : « Nous généralisons beaucoup trop en voulant élever à la hauteur d'une loi générale des conclusions tirées d'observations faites sur des cas spéciaux... On part, d'une manière consciente ou inconsciente, de l'axiome préconçu, que la nature se pose un but à atteindre, suivant un plan combiné d'avance, comme nous le faisons pour nos actions. Nous prêtons à la nature ce plan, que nous avons élaboré dans notre cerveau, et nous ajoutons à cette croyance l'idée que la nature, pour arriver à son but, choisit toujours la voie la plus directe, le chemin le plus court » (1).

3° En effet, s'il est possible, certain même, que les Chéloniens s'enchainent avec les autres reptiles par une forme dentée, qu'est-ce qui prouve que cette forme est chélonienne? Les tortues ne peuvent-elles pas descendre d'un ordre de reptiles édentés déjà ? Que les *Trionyx* aient des dents embryonnaires, j'admets que cela prouve qu'ils descendent d'animaux pourvus de dents; mais on ne peut en conclure qu'ils dérivent de *Chéloniens* dentifères. Les oiseaux actuels descendent de formes anciennes dentifères, soit; mais rien ne prouve que l'évolution s'est faite de la même manière dans l'*ordre* des Chéloniens.

4° En admettant une forme chélonienne dentifère primitive, quelle raison nous oblige d'admettre que cette forme doit être opposée à tous les autres Chéloniens? Pour nous, les *Trionyx* sont des formes anciennes, primitives, quoique déjà spécialisées; ne serait-il pas possible de trouver un jour un *Trionycida dentifère?* La présence ou l'absence de dents n'est pas un motif pour séparer une forme d'un groupe naturel auquel elle peut appartenir par le reste de ses caractères. En adoptant le terme *Odontornithes*, nous n'admettons d'ailleurs nullement que ces animaux doivent être opposés à tous les autres oiseaux, puisqu'il

(1) Carl Vogt, *op. cit.*, p. 481.

y a des *Ratités* et des *Carinates* dentifères. De la même manière ne pourrait-on pas avoir des *Athecæ* et des *Thecophora* dentifères?

§ 2.

Cryptopodes + *Gymnopodes*, Latreille, Gray.

La subdivision des Chéloniens en *Cryptopodes* et en *Gymnopodes* est tout à fait arbitraire et elle ne repose pas même sur un seul caractère anatomique.

Dans un même groupe naturel, les *Trionycida*, par exemple, il y a des espèces *gymnopodes* et *cryptopodes*.

De plus, il y a une troisième forme de rétractilité du cou : celle où l'animal fléchit latéralement la tête pour l'abriter sous le bord proéminent de la carapace, caractère qui a servi à déterminer les *Chélydes* ou *Pleurodères*, mais qui n'est pas même constant dans ce groupe.

D'une manière générale, tous les Chéloniens retirent plus ou moins leurs pattes sous la carapace par une flexion analogue; quant à la flexibilité du cou, on doit distinguer :

a) Les *Orthodères*, Boulenger, qui retirent la tête vers ou sous la carapace tout en la maintenant dans l'axe du corps. Suivant le développement du crâne et de la carapace, elles peuvent plus ou moins abriter leur tête;

b) Les *Pleurodères* (πλεύρον = côté), dans un sens restreint, ne comprennent que les *Chelydidæ*, dans la classification de Boulenger, qui fléchissent latéralement la tête.

La division en *Gymnopodes* et en *Cryptopodes*, d'après le système de Latreille, ne s'appuie que sur le développement plus ou moins grand d'un caractère.

Dans cette classification, Latreille juxtapose *Chelydra* (=*Saurochelys*), *Chelonia*, *Chelys*, appartenant à trois groupes naturels.

Gray sentait déjà le défaut de cette classification, puisqu'il retire *Chelys* et *Chelydra* des *Gymnopodes*; le premier fléchit la tête latéralement, et le second ne peut abriter ses membres sous sa carapace faiblement développée.

On a de tout temps exagéré l'importance de la flexibilité de la région cervicale et des membres : dans les *Émydes* au sens large du mot, dont toutes les formes sont *Orthodira* [1], selon la belle et juste expression de Boulenger, on trouve tous les degrés de cette flexibilité; il en est de même des *Trionyx*. Dans les *Chélydes* (= *Pleurodères*), il en est qui sont *Orthodira* (*Sternothærus, Pelomedusa, Podocnemis, Peltocephalus*); les autres fléchissent latéralement la tête.

Les *Thalassites* retirent leur tête jusque près de la carapace; je pense que *Ch. Waterkeynii*, du rupélien de la basse Belgique, pouvait retirer la tête sous la carapace.

Gray ajoutait un autre caractère : la carapace des *Cryptopodes* est écailleuse, et celle des *Gymnopodes* est d'ordinaire recouverte d'une peau non segmentée (*Trionyx, Sphargis*) :

a) Ce caractère n'est pas du tout constant; nous avons des *Cryptopodes* couverts d'une peau molle (*Apholidemys* [2], Pomel);

b) Outre que, parmi les *Gymnopodes*, les *Cheloniidæ* sont écailleuses, d'après Dollo, *Psephophorus rupeliensis* était peut-être écailleux;

c) On ne peut pas assimiler la peau dure de *Sphargis* à la peau molle de *Trionyx*.

§ 3.

Chelonii + *Amydæ*, Oppel, Agassiz.

Pedibus pinniformibus + *Pedibus digitatis* (Merrem).
Edigitata + *Digitata* (Harworth).
Digitata + *Pinnata* (Bell, Gray).

Sous ces noms différents, nous avons rencontré la subdivision fondamentale des Chéloniens en deux sections ou en deux sous-ordres.

---

(1) Boulenger, *On the characters of the Chelonian families Pelomedusidæ and Chelydidæ*. Ann. and Magaz. of Natural History, May 1888, p. 347.

(2) *Apholidemys* doit être rangé parmi les *Emydidæ* Cfr Cope, *The Vertebrata of th tertiary formations of the West*, 1883, p. 113.

Cette classification est appuyée fondamentalement sur la nature des membres, transformés en nageoires dans les tortues marines, les antérieurs plus allongés que les postérieurs, les doigts recouverts par un tégument commun et n'apparaissant plus distinctement en dehors, et avec un nombre d'ongles très réduit. On a parfois ajouté secondairement d'autres caractères, tels que la voûte osseuse du crâne, l'état incomplet de la carapace et du plastron, qui se rencontrent également ailleurs et qui ne s'appliquent pas tous au *Sphargis* rangé dans ce groupe de tortues marines.

Cette division est artificielle, car elle ne tient compte que d'un seul caractère, qui est de plus un caractère d'adaptation. Dans les vertébrés supérieurs adaptés à la vie pélagique, on voit partout s'opérer la réduction des membres postérieurs, en même temps que les doigts s'allongent, se recouvrent d'un tégument commun et deviennent invisibles au dehors (Sirénéens, Cétacés). On peut même suivre parfois cette dégradation des membres, comme dans les *Sirénéens* (*Pugmeodon* a encore un bassin et un fémur rudimentaire), et aussi dans les *Ichthyopterygia* (1).

Les caractères des membres, où les modifications sont très apparentes, ne peuvent tout au plus servir qu'à représenter les différents stades d'évolution d'un groupe restreint et à caractériser les familles.

En présence de crânes complets et de carapaces entières, Rutimeyer ne sait encore s'il faut placer les *Chelone*, décrites comme telles par Owen, parmi les tortues marines ou les tortues d'eau douce, si elles ont ou non les membres transformés en nageoires. Il n'y a donc pas là deux plans de structure différents dans cet ordre. Parmi les plus anciennes tortues d'eau douce, il en est qui ont une carapace rappelant celle de nos tortues pélagiques et, durant le développement ontogénique, nos *Émydes* passent par une phase *thalassite,* en ce qui a rapport à la carapace et au plastron.

---

(1) Baur, *On the morphology and origin of the Ichthyopterygia.* American Naturalist, September 1887, p. 837.

De plus, on réunit tous les autres Chéloniens par un caractère négatif, leurs membres n'étant pas transformés en nageoires, ou leurs doigts étant apparents au dehors (ce qui n'est pas complètement vrai pour nos tortues terrestres), bien qu'il y ait des modifications très nombreuses dans ces pieds digités. Les pieds des *Trionyx* ont une valeur *taxonomique* aussi grande que les membres des tortues marines, comme Baur l'a fait ressortir.

Il y a de plus passage graduel et insensible entre les autres Chéloniens et les tortues marines, comme le démontrent les *Thalassémydes*, les *Chelydridæ*, les *Propleuridæ*.

Cette classification ne tient aucun compte des *Sphargis*, lesquels, ainsi que nous le verrons, ne peuvent rester dans le même groupe avec les autres tortues pélagiques.

Les différences qu'on peut trouver dans le crâne, le bassin, la carapace, etc., ne sont que secondaires et tout au plus génériques.

Par conséquent cette classification, donnant une fausse idée de l'ordre des Chéloniens, appuyée sur des caractères d'adaptation, ne tenant pas compte de l'étroite affinité des deux groupes, laissant dans un groupe des espèces qui s'écartent autant entre elles que les *Thalassites* s'écartent des *Amydæ*, cette classification, dis-je, doit être rejetée.

§ 4.

Athecæ + *Thecophora*, Dollo.

Dermochelys (1) et ses congénères ont été élevés au rang d'une famille indépendante, non subordonnée aux *Cryptopodes*,

(1) [En 1871, Cope (1) sépare *Dermochelys* (= Sphargis) des autres tortues marines pour en faire un groupe distinct, les *Athecæ*, dans lequel il range *Protostega* (2), qu'il place plus tard, en 1875 (3), dans une famille distincte, les *Protostegidæ*. Ont adopté (4) le groupe des *Athèques* : Cope, Dollo, Smith-Woodward, Boulenger et Gunther.

(1) Cope, *On the homologues of some of the cranial bones*, etc., 1871, p. 235.
(2) Cope, *A description of the genus Protostega*, etc., 1873, p. 432. Proceed. Am. Phil. Soc., vol. XII.
(3) Cope, *Check-List of North American Batrachia and Reptilia*. Bull. U. S. Nat. Mus., n° 1, 1878, p. 16.
(4) Cfr Baur, *Die systematische Stellung von Dermochelys* Blainville. Biologisches Centralblatt, 1889, pp. 149-153 et 180-191.]

ou aux *Chelonii*, ou aux *Oiacopodes*, etc., par Cope, puis par Gervais et Seeley. Dollo, dans la suite, a opposé les *Athecæ*, Cope, à tous les autres Chéloniens désignés sous le nom de *Thecophora*.

Nous établirons : *a*) que ces Chéloniens constituent une famille distincte; *b*) qu'ils ne peuvent être opposés aux autres Chéloniens.

Appartiennent à ce groupe (1) : *a*) *Sphargis*, Merr., *Psephophorus*, von Mey., *Psephoderma* (?), von Mey. (Ces trois espèces ont une armure dorsale formée d'une mosaïque de petites plaques polygonales); *b*) *Protostega*, Cope, et *Protosphargis*, Capell., qui n'ont pas de carapace semblable.

Le caractère fondamental du groupe *a*) des *Athecæ* est de posséder une carapace en mosaïque dont les éléments ne sont pas soudés à l'exosquelette.

Baur (2) a émis l'opinion que l'armure dorsale de ces *Athecæ* s'est formée par dilamination en mosaïque de la carapace d'un ancêtre *thécophore*, et chez *Eretmochelys* apporte-t-il en preuve : « Beginnen die aüsseren Theile der Costalplatten sich in mosaïkartige Stücken aufzulösen; dies ist an der dritten bis sechsten Costalplatte zu beobachten. »

Dollo (3) a réfuté cette opinion de Baur; nous croyons inutile de répéter ici les nombreux arguments invoqués par le naturaliste de Bruxelles.

Nous ajouterons seulement que les côtes de *Sphargis*, *Protostega*, *Protosphargis*, peut-être de tous les *Athecæ*, portent des vestiges des pièces costales des *Thecophora*; en effet :

---

(1) [Il faudra probablement ajouter à cette liste *Eosphargis*, Lydekker (1) = *Chelone gigas*, Owen (2), dont les caractères sont : « Skull and humerus of the general type of *Psephophorus;* carapace consisting of a median dorsal row of large carinated plates, of which the width largely exceeds the lenght, and probably also of a series of large marginals. » (P. 241.)

(2) BAUR, *Osteologische Notizen über Reptilien*. ZOOLOGISCHER ANZEIGER, n° 238, 1886.

(3) DOLLO, *Première note sur les Chéloniens oligocènes*. BULLETIN DU MUSÉE ROYAL, t. V, 1888, pp. 85 et sqq.

---

(1) LYDEKKER, *On remains of eocene and mesozoïc Chelonia*, etc. Q. J. G. S. May 1889, p. 241.

(2) OWEN, *History of British fossil Reptilia*, vol III, p. 188.]

a) Les côtes de *Sphargis*, au lieu d'être arrondies, sont plus ou moins élargies, leurs bords latéraux sont minces; on voit parfaitement cet élargissement dans les planches qui accompagnent le mémoire de M. Gervais ([1]). La huitième côte, du côté droit, est surtout intéressante, parce que vers le milieu de sa longueur elle présente des deux côtés un élargissement plus considérable. Nous avons examiné les *Sphargis* du Muséum de Paris : la côte se dessine arrondie à la face ventrale comme dans les *Thecophora*, les bords latéraux brisés montrent un tissu fort spongieux. Ces côtes rappellent parfaitement celles des jeunes Chéloniens, où les pièces costales se forment par l'élargissement graduel des côtes ([2]). Nous sommes convaincu que cet élargissement représente la carapace des *Thecophora*, et que par conséquent les pièces en mosaïque des *Athecæ* ne sont pas à homologuer avec la carapace des *Thecophora*.

b) Ceci devient évident si l'on examine l'extrémité supérieure de la côte : le capitulum développé, à son origine, se continue par un col assez rétréci, mais au delà la côte s'élargit brusquement et une expansion osseuse se prolonge librement au-dessus du col à la face dorsale. C'est surtout visible dans les planches qui accompagnent le mémoire de Capellini ([3]) : ce prolongement n'est pas le *tuberculum*, par conséquent c'est le prolongement de la pièce costale libre au delà du col, prolongement tout à fait semblable à celui des *Thecophora*.

c) Capellini a été frappé aussi de cette structure, car il dit ([4]) : « Vorrei pero notare che nel fossile di cui mi occupo vi ha gia qualche cosa che accenna quasi ad una evoluzione del tipo *Sphargis*, verso il genere Chelone, e che ciò si releva dallo studio *della faccia dorsale delle coste* ed è confermato in qualche modo anche dal maggiore sviluppo delle placche del piastrone. »

C'est, de plus, l'avis de M. Seeley : appuyé sur de bonnes

([1]) Paul Gervais, *Ostéologie du Sphargis Luth*, etc., pl. VI.

([2]) Rathke, *Entwickelung der Schildkröten*, p. 84.

([3]) Capellini, *Il Chelonio Veronese* (*Protosphargis veronensis*, Cap.). Reale Accademia dei Lincei, 1883-1884, pl. V, fig. 7, 9, 10.

([4]) Capellini, *op. cit.*, p. 21.

raisons, il affirme « that the ordinary carapace of a Chelonian is in no way represented by the dermal skeleton of *Psephophorus* or *Sphargis* (1). »

L'exosquelette des *Thecophora* est représenté dans les *Athecæ* (2) :

1° Par la pièce nuchale;

2° Par l'élargissement des côtes;

3° Par des pièces marginales (Cope (3) et Baur (4));

4° Par les éléments du plastron.

On voit par là que les séries neurale, costale, marginale et le plastron des *Thecophora* sont représentés dans les *Athecæ* à l'état rudimentaire, et que, par conséquent, il n'y a pas une opposition complète entre ces reptiles et leurs congénères. On semble même entrevoir la liaison des deux groupes par des formes telles que *Protosphargis,* sans carapace en mosaïque, avec les côtes plus élargies, un plastron très développé; tel est, d'ailleurs, l'avis de Cope.

Les *Athecæ* s'écartent donc du restant des Chéloniens :

a) Par l'état rudimentaire de leur exosquelette thécophorien ;

b) Par la présence, chez plusieurs d'entre eux, d'ossifications dermiques qui n'ont rien de comparable chez les autres;

c) Par leur épiderme dur, coriace, semblable à du cuir, excepté, peut-être, chez *Psephophorus rupeliensis.*

Par le reste de leurs caractères, ils se rapprochent des autres tortues et notamment des tortues marines (5), bien qu'il y ait quelques différences secondaires.

La persistance des *Athecæ,* depuis les temps les plus anciens, côte à côte avec les tortues marines, sans transition bien apparente entre elles, démontre également un groupe indépendant.

---

(1) Seeley, *Note on Psephophorus polygonus*, op. cit., p. 410.

(2) On sait que les grandes pièces rayonnées de *Protostega,* décrites comme pièces dorsales, appartiennent au plastron.

(3) Cope, *The Vertebrata of the tertiary formations*, etc., p. 114.

(4) Baur in Dollo, *Première note sur les Chéloniens oligocènes et néogènes*, etc., p. 34 (en note).

(5) Baur, *Osteologische Notizen über Reptilien.* Zoologischer Anzeiger, n° 238, 1886.

De ces considérations il ressort que ces animaux doivent être séparés des autres tortues marines et constituer un groupe ou une famille à part.

Faut-il les opposer aux autres Chéloniens? Si tous avaient une carapace en mosaïque; si, de plus, ils n'avaient pas l'exosquelette rudimentaire des *Thecophora*, nous croirions qu'il faudrait les opposer. Mais, actuellement, il est impossible d'y reconnaître deux *types différents* de Chéloniens, surtout si l'on tient compte des *Protostegidæ;* les caractères différentiels ne sont ni assez nombreux, ni assez constants, ni assez importants pour motiver l'opposition des deux groupes, d'autant plus que nos tortues actuelles passent, durant leur âge fœtal, par une forme rappelant bien les *Protostegidæ*.

[M. Baur soutient que les *Protostegidæ*, notamment *Protostega*, ne sont pas de vraies *Athecæ :* « *Protostega,* Cope (1), dit-il, steht der Cheloniidæ sehr nah; die Pleuralia sind zur beinahe vollkommen reduziert; der Plastron ist noch wohl entwickelt, ebenso die Peripheralia und Neuralia. Der Schädel ist wie bei den Cheloniidæ; Epipterygoïd und absteigende Fortsätze der Parietalia sind vorhanden, ebenso ein verknöchertes Articulare. Der Humerus steht in der Mitte zwischen *Dermochelys* und *Cheloniidæ*, ebenso das Coracoid.

» *Protosphargis* hat sich wohl ganz ähnhlich verhalten, scheint aber noch etwas mehr in ihre Dermalossifikationen reduziert.

» In Wirklichkeit sind *Protostega* und *Protosphargis* gar keine *Athecæ*. »

Il ajoute vers la fin : « Es scheint mir wahrscheinlicher dass *Dermochelys* und *Psephophorus* direct auf *Protostega* — oder *Protosphargis* — ähnliche Formen zurückführbar sind, und dass der mosaïkartige Panzer möglicherweise eine Neubildung darstellt. »

Nous nous rallions à cette opinion de M. Baur; mais, précisé-

---

(1) BAUR, *Biologisches Centralblatt,* op. cit., p. 190.

ment à cause d'elle nous réunissons ces deux familles en un groupe spécial.

Les affinités des *Athecæ* avec les *Cheloniidæ* sont incontestables; mais il existe des affinités aussi, et plus étroites, entre d'autres groupes de tortues que l'on sépare cependant.

Il existe donc un groupe de tortues bien délimité dont les diverses espèces forment une série (encore incomplètement connue actuellement, il est vrai), dont l'exosquelette thécophorien s'est réduit d'âge en âge. Ce groupe doit avoir des rapports étroits avec les tortues marines, soit parce qu'il en dérive, soit par adaptation. Si l'on considère, de plus, les étroites affinités des tortues anciennes avec les tortues marines actuelles (Rutimeyer), la création du groupe des *Athecæ* semble s'imposer, et avec l'extension que lui donne M. Dollo.]

§ 5.

Diacostoïdea + *Paradiacostoïdea*, Baur.

Les caractères sur lesquels Baur appuie sa classification des Chéloniens ne sont certainement pas suffisants pour motiver l'opposition des *Trionycidæ* aux autres tortues.

Le caractère tiré de l'*entoplastron* ne nous semble avoir aucune valeur morphologique; d'ailleurs, M. Baur ne tient nullement compte de l'absence de cet élément dans d'autres espèces.

L'état rudimentaire du plastron rend bien compte de la séparation de l'*épiplastron* avec l'*hyoplastron;* de plus, M. Baur semble douter lui-même de la constance de ce caractère.

Nous croyons que le plastron est arrêté à un stade embryonnaire, plutôt que de croire à une régression; le naturaliste américain croit que le plastron des *Trionycidæ* dérive de la spécialisation d'un plastron d'*Émyde*. Le plastron des tortues fluviatiles se développe surtout par l'élargissement des bords arrondis de ses éléments et non pas par des digitations comme dans les *Émydes*.

La longue adaptation à un milieu aquatique (les plus anciennes tortues semblent avoir habité des estuaires et des fleuves) rend compte de l'augmentation du nombre des phalanges à deux doigts. Il ne faut pas exagérer ce caractère, sinon il faudrait tenir compte, dans la même proportion, de la réduction des phalanges dans les *Émydes* et les *Testudinida.*

La singulière morphologie (1) des vertèbres caudales et sacrées ne semble pas être d'une grande importance. Ce caractère ne serait-il pas en rapport avec l'état rudimentaire des centres des vertèbres et, plutôt que d'être un caractère de spécialisation, ne constituerait-il pas un caractère d'ancienneté?

Néanmoins, par ces caractères et par une nombreuse série d'autres, constants ou presque constants (2), exclusifs ou presque exclusifs dans ce groupe, comme l'état rudimentaire des chevrons, l'épiderme mou, la première vertèbre dorsale, ainsi que la lombaire et les sacrées conservant longtemps leur indépendance, les fontanelles persistantes dans la carapace et le plastron, l'absence presque constante des os marginaux, la pièce nuchale restant séparée longtemps de la carapace, le nez en trompe, leur rostre allongé, la crête occipitale si développée, la présence de dents embryonnaires, l'ouverture des choanes, « die rippenartige Structure » (Baur) de la pièce nuchale rappelant celle des *Chelydridæ,* le nombre des pièces costales variant de sept à neuf, le nombre réduit des pièces neurales et l'absence de pièces sus-caudales, etc., par tous ces caractères nous sommes obligés à les réunir, comme la plupart des naturalistes l'ont fait, en un groupe distinct, indépendant des autres groupes, auquel il faut donner le nom le plus ancien, *Trionycidæ,* Gray.

Depuis leur apparition, ces animaux constituent un groupe bien défini, bien limité, nettement séparé des autres tortues. On

---

(1) M. Baur a fait observer récemment que ce caractère se rencontre aussi dans les Pleurodères vivantes.

(2) Cfr les caractères du crâne de ces tortues : BAUR, *Zoologischer Anzeiger,* 1888, p. 736.

ne saurait guère montrer une transition entre ces animaux et les autres Chéloniens ([1]).

Il est impossible de les faire dériver d'un des groupes des tortues connues, pas plus qu'on ne saurait indiquer le passage des *Trionycidæ* à ces dernières. Le tableau phylogénétique de Cope méconnait la grande spécialisation des *Trionyx,* quoiqu'ils conservent encore un certain nombre de caractères embryonnaires.

§ 6.

Cryptodira ET *Pleurodira.*

Cope divise tous les Chéloniens, Athecæ non compris, en *Cryptodira* et *Pleurodira;* de même Dollo divise ses *Thecophora* en deux groupes. L'opinion de M. Boulenger est intéressante : « There is probably not in the whole classification of Reptiles a more natural division than that of the typical Chelonians (i. e. *excluding the Athecæ and Trionychoïdea*) into *Cryptodira* and *Pleurodira* ([2]) ».

Nous allons examiner les caractères des *Pleurodira* ([3]) (= *Chélydes* = *Chelydidæ,* etc.) :

1° Les Pleurodères retirent latéralement la tête sous la carapace; comme Boulenger le dit, ce caractère n'est pas constant dans tous les *Pleurodira;* les *Pelomedusidæ* sont *Orthodira*;

2° Ils ont une plaque *intergulaire :* cette plaque se rencontre également dans *Tretosternum Barkewelli* ([4]), Mantell (= *Pel-*

([1]) [Tout récemment M. Baur (*Zoologischer Anzeiger,* 1889, p. 241) exprime l'opinion que *Idiochelys, Eurysternum, Chitracephalus* pourraient donner « Anknüpfungspuntke » vers les *Chilotæ.*]

([2]) BOULENGER, *On the characters of the Chelonian families Pelomedusidæ and Chelydidæ,* op. cit., p. 346.

([3]) [Baur, si versé dans la connaissance des tortues, définit les *Pleurodères* typiques comme suit : « Intergulare vorhanden, Plastron mehr oder weniger auf Carapace übergreifend, Becken mit Rücken- und Bauchschild suturös verbunden. » (*Zoologischer Anzeiger,* 1888, p. 419.)]

([4]) LYDEKKER and BOULENGER, *Notes on Chelonia.* GEOLOGICAL MAGAZINE, decade III, vol. IV, n° 6, June 1887, p. 273.

tochelys Duchastelii, Dollo); de plus, *Thalassochelys* (¹) a encore une intergulaire rudimentaire et *Chelone* a une intergulaire bien développée;

3° Le bassin est soudé au plastron; mais il existe des *Pleurodira* (²) dont l'ischium n'est pas soudé au plastron; on pourrait concevoir un *Pleurodira* dont le pubis soit également libre. Bien plus, nous ne pouvons comprendre l'importance de ce caractère : le bassin est aussi immobile ailleurs : « Eine Verbindung, dit Rutimeyer (³), zwischen Becken und Bauchschild fehlt bekanntlich bei Emyden keineswegs, aber sie erschränkt sich auf Bänder, welche vom Os Pubis und Ichium ausgehen und am Bauchschild ähnliche Spuren zurücklassen... »

Chez *Dermatemys* (⁴) et *Adocus Wyomingensis* (⁵) il y a au plastron des traces (fossettes, Eindrücke) des impressions laissées par l'insertion ligamenteuse du pubis;

4° La mandibule s'articule avec le crâne par un condyle situé dans un enfoncement du quadratum, en d'autres termes, le talon articulaire du *quadratum* est très peu développé;

5° « The outer border of the tympanic cavity is completely encircled by the quadrate (⁶) ». Néanmoins chez *Chelodina* ces caractères ne sont pas si tranchés;

6° « The pterygoids (⁷) are extremely broad throughout and form wing-like lateral expansions » ;

7° « The cervical vertebrae (⁸) have strong transverse processes, and their cup-and-ball articulations are single throughout. » — Les tortues marines néanmoins ont aussi des paradiapophyses très développées.

A ces caractères on en ajoute généralement un grand nombre

(¹) STRAUCH, *Chelonogische Studien*, etc., p. 62.

(²) RUTIMEYER, *Ueber den Bau*, etc., p. 84.

(³) RUTIMEYER, *Ibid.*, p. 28.

(⁴) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten von Solothurn*, etc., p. 152.

(⁵) COPE, *Proceed. Am. Philosoph. Soc.*, XI, 1869, p. 16.

(⁶) BOULENGER, *On the characters of the Chelonian families Pelomedusidæ and Chelydidæ*, etc., p. 345.

(⁷) *Ibid.*, p. 346.

(⁸) *Ibid.*, p. 346.

d'autres dont la constance n'est pas aussi grande, mais dont l'ensemble concourt à donner à ce groupe sa physionomie propre;

8° A l'époque actuelle, les *Pleurodères* sont confinées dans l'hémisphère austral; les autres, *Cryptodira*, Cope, sont davantage répandues dans l'hémisphère boréal. Nous ne parlons pas seulement des tortues marines, mais il y a des *Émydes* (1) dans l'hémisphère austral. Huxley (2) a fait connaitre récemment *Ceratochelys*, apparenté à *Chelydra*, du quaternaire d'Australie, où les *Chélydes* dominent actuellement. Mais *Boulenger* (3) range ce singulier reptile parmi les Pleurodères.

Cette distribution géographique n'a pas de valeur taxonomique; il est probable que des causes purement géologiques ont contribué à l'extinction des nombreux *Chélydes* de notre hémisphère;

9° Les *Chélydes* ont souvent une tête aplatie, déprimée;

10° Plusieurs ont des os nasaux normalement développés; ces os se rencontrent également dans les *Propleuridæ;*

11° Leurs os frontaux ont une forme spéciale, souvent caractéristique;

12° Les orbites sont séparées de la fosse latéro-temporale par une cloison osseuse formée par le *postfrontal*, le *zygomatique* et le *palatin*; ailleurs il n'y a que des traces de cette cloison;

13° Quand une voûte temporale existe, elle est constituée autrement qu'ailleurs (4);

14° Le quadratojugal manque souvent;

15° La mandibule est souvent faible;

16° Les mâchoires sont très rarement ou jamais dentelées;

17° Le palais possède une rainure profonde « welche sich nach dem hintern Theile der Gaumenfläche erstreckt und in

---

(1) STRAUCH, *Die Vertheilung der Schildkröten ueber den Erdball*. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE St-PÉTERSBOURG, tome VIII, 1865, p. 195.

(2) HUXLEY, *Preleminary Note on the fossil remains of a Chelonian Reptile, Ceratochelys Sthenurus, from Lord Howe's Island, Australia*. NATURE, april 28, 1887, p. 615.

(3) G.-A. BOULENGER, *On the systematic position of the Genus Miolania, Owen (Ceratochelys, Huxley)*. PROC. ZOOLOGICAL SOCIETY LONDON, 1887, p. 554.

(4) RUTIMEYER, *Ueber den Bau*, etc., p. 60.

dieser Ausbildung ein nichtweniger eigenthümliges Merkmal der Chelyden-Schädels bildet » ([1]);

18° Leur cou est souvent aplati de haut en bas (Duméril et Bibron);

19° « Bei sämmtlichen von mir untersuchten lebenden *Pleurodira*, dit Baur ([2]), ist das Sacrum um einen bis zwei Wirbel nach vorn gerückt, so dass also ein oder zwei Sacralwirbel, ja sogar der letzte Dorsalwirbel zu Caudal-Wirbeln geworden sind » ;

20° La première côte se soude plus tôt et plus intimement avec la première pièce costale que dans les autres Chéloniens;

21° Les vertèbres dorso-lombaires et caudales sont coossifiées de bonne heure avec l'exosquelette;

22° Les paradiacostoïdes sacrées sont souvent résorbées, tandis qu'ailleurs elles s'unissent à l'ilion, lequel se soude ici directement avec les vertèbres;

23° Leur *carapace* et *plastron* passent rapidement par la phase thalassite ou rudimentaire et se soudent de bonne heure; la carapace se forme de bonne heure durant le développement ontogénique, les caractères de l'animal adulte sont acquis de bonne heure;

24° Leur bassin se soude intimement, non seulement avec le plastron, mais encore avec la carapace;

25° Les pédoncules axillaires et inguinaux prennent généralement un plus grand développement et s'élèvent davantage dans l'intérieur de la carapace. Les pièces marginales présentent une grande différenciation caractéristique;

26° La chambre sternale (*Sternalkammer*, Rutimeyer) est plus volumineuse qu'ailleurs;

27° Les pièces neurales sont souvent réduites en surface et en nombre; *Cinosternon* (Émyde) est dans le même cas; *Pleurosternon* (Pleurodère) a généralement les pièces neurales en nombre normal;

([1]) Rutimeyer, *Ueber den Bau*, etc., p. 58.
([2]) Baur, *Zoolog. Anzeig.*, 1888, p. 422.

28° Souvent il existe un *mésoplastron;* cet élément s'est également rencontré dans les Cryptodères (*Platychelys* (¹), et *Baëna* (²));

29° Le plastron est souvent échancré en arrière et y est plus massif;

30° Les fontanelles latérales du plastron se ferment de bonne heure, souvent par un mésoplastron;

31° Beaucoup de *Chélydes* n'ont qu'une seule pièce *sus-caudale;* ailleurs le nombre en est de deux ou de trois, etc.

Bien que chacun de ces caractères, pris isolément, ne soit pas de nature à motiver la séparation des *Pleurodères* d'avec les autres Chéloniens (*Trionycida* et *Athecæ* exceptés), cependant leur ensemble exige cette séparation, d'autant plus que depuis l'apparition des *Chélydes,* ces caractères sont constants; ces animaux sont depuis lors séparés nettement des autres tortues et ont eu leur évolution propre.

Quelle place assigner à ce groupe? L'opposer au reste des tortues ou non? Si nous nous rappelons que les *Émydes,* les *Chélydes,* les *Chersites* passent tous plus ou moins rapidement par la phase thalassite (Rutimeyer), que les *Chélydes* sont des *Émydes* d'une vie plus rapide (Rutimeyer), que, entre les *Émydes* et les *Chélydes,* il y a des relations et un certain parallélisme que Rutimeyer a mis en évidence, que beaucoup de caractères des Chélydes ne sont qu'une exagération des caractères *émydoïdes,* qu'il y a de part et d'autre des formes avec une peau molle, que ces groupes ont des membres assez ressemblants, etc., on pourrait croire que cette opposition n'est pas justifiée et que les *Chélydes* pourraient être le terme final d'une évolution commençant par une forme *chélydroïde* et passant par la forme *émydoïde.*

Cependant on ne peut exagérer la spécialisation des *Chélydes,* parce que chez *Chelys* (³), par exemple, nous trouvons encore

---

(¹) Rutimeyer, *Die fossilen Schildkröten,* etc., p. 28.
(²) Cope, *The Vertebrata of the tertiary formations,* etc., p. 111.
(³) Cuvier, *Ossements fossiles,* vol. IX, p. 434.

des traces de *centrale* dans le carpe; les cinq os de la seconde rangée sont encore libres et presque égaux.

D'un autre côté, il existe des formes fossiles auxquelles Rutimeyer a appliqué le terme de *Thalassochélydes* ([1]), telles que les *Idiochelys* ([2]), qu'il faut incontestablement ranger parmi les Pleurodères ([3]), bien que carapace et plastron soient incomplets et les pédoncules axillaires et inguinaux peu développés : ce sont les formes anciennes de ce groupe. Dans les formes actuelles, comme parmi les fossiles, il en est à carapace mince et d'autres avec une carapace plus épaisse; de plus, l'ossification chez les premières progresse plus lentement.

Les *Pleurodères* constituent donc, aussi bien morphologiquement que paléontologiquement, un groupe bien distinct, ayant eu son évolution propre, aussi bien que les *Athecæ*, les *Trionycidæ*, tandis que le restant des tortues ont entre elles des affinités multiples : les *Testudinides* ou *Chersites* avec les *Cheloniidæ* (Rutimeyer); celles-ci avec les *Chélydroïdes*, surtout par les *Propleuridæ* (Rutimeyer, Cope, Dollo); les *Chélydroïdes* avec les *Émydes*. Toutes ces tortues constituent un groupe distinct, ayant entre elles des affinités multiples, et semblant avoir eu aussi leur évolution propre. Les plus anciennes formes de ce groupe ont les plus grandes affinités avec les *Cheloniidæ* et les *Chélydroïdes*, qui semblent être les formes ancestrales. Il nous parait donc qu'il faut accepter partiellement les vues de Cope et de Dollo, intégralement celles de Boulenger, et admettre quatre groupes fondamentaux dans l'ordre des Chéloniens :

1. *Athecæ*, Cope.
2. *Trionycidæ*, Gray, 1825.
3. *Cryptodira*, Cope.
4. *Pleurodira* ([4]), Dum. et Bibr.

([1]) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 139.

([2]) RUTIMEYER, *Ueber den Bau*, etc., p. 112.

([3]) Cope cependant le range parmi les *Chelydridæ*. (*The Vertebrata of the tertiary format*. etc., p. 112.)

([4]) Le terme *Chelydidæ* ou *Chélydes* aurait la priorité sur le terme *Pleurodira*; mais on est aujourd'hui presque d'accord pour désigner sous le nom de *Chelydidæ* une subdivision des *Pleurodira*; ce dernier terme doit être admis, pour ne pas avoir à changer toutes les dénominations.

VI. *Examen des classifications* (suite).

SUBDIVISION DES CHÉLONIENS.

Athecæ.

La subdivision des *Athecæ* proposée par M. Dollo s'imposait et elle sera acceptée par tous les naturalistes. Ces deux groupes méritent incontestablement le rang de *familles.*

Trionycidæ.

Jusqu'à présent on n'a guère tenté de subdiviser la section, des *Trionycidæ.* La subdivision de Duméril et Bibron, basée sur la rétractilité des membres, est tout à fait artificielle. On n'est pas encore fixé sur le nombre de genres ou d'espèces appartenant à ce groupe intéressant. La classification proposée par Gray est basée sur des caractères trop superficiels et n'a rallié l'adhésion d'aucun naturaliste. Tous les *Trionycidæ,* tant vivants que fossiles, ne constituent qu'une seule famille bien naturelle, parfaitement limitée. Cependant on ne saurait méconnaître que la connaissance de ces animaux est encore bien incomplète.

Cryptodira.

La classification des *Cryptodira* de Cope (dont nous séparons les tortues fluviatiles), basée presque exclusivement sur les caractères du plastron, ne nous semble pas acceptable. Ontogénétiquement et phylogénétiquement le plastron subit des modifications très nombreuses sans qu'elles entrainent des modifications correspondantes dans l'anatomie de l'animal. Si les pédoncules axillaires et inguinaux sont plus ou moins réduits, la carapace est plus ou moins solidement articulée au plastron et la chambre sternale plus ou moins développée. Souvent les *Chélydes* anciennes ont également les pédoncules moins développés. Durant leur développement, tous les Chéloniens sont plus ou moins dactyloplastres ainsi que les *Athecæ* à l'âge adulte.

Idiochelys n'est-il pas dactyloplastre tout en prenant place parmi les Pleurodères (Rutimeyer)? Cette classification basée sur un seul caractère nous semble artificielle.

Dermatemys est une tortue *Chélydroïde* ([1]), ainsi que Rutimeyer l'a établi; cependant Cope ([2]) est obligé de la placer parmi les *Emydidæ*, à cause de son plastron, non dactylosterne.

Tretosternum Bakewelli, Mantell ([3]) (= *Peltochelys Duchastelii*, Dollo ([4])) est, par l'ensemble de ses caractères, une *Chélydroïde* ([5]), et cependant M. Dollo ([6]) assure qu'elle n'est pas dactylosterne (= dactyloplastre).

M. Dollo ([7]) justifie son adhésion à la classification de Cope par les considérations suivantes : « Sa division des *Cryptodira* en *Dactylosterna, Clidosterna* et *Lysosterna* me paraît également justifiée, car le premier de ces groupes nous représente, au point de vue du plastron, des types ayant conservé avec assez de pureté, quoique à des degrés divers, la forme primitive. Les deux derniers, au contraire, sont des spécialisations, mais dans des sens différents, puisqu'on ne saurait les faire dériver l'un de l'autre, attendu que :

» 1. On ne peut penser à faire sortir, toute question de priorité dans l'apparition au cours des temps géologiques mise à part, les *Lysosterna* des *Clidosterna*. Comment supposer, en effet, que le plastron, ayant un jour acquis un solide appui sur l'armure dorsale par le moyen de pédoncules axillaires et inguinaux, vienne à voir ces pédoncules disparaître? D'ailleurs, on n'observe point, dans l'embryogénie des premiers, des pédoncules qui s'atrophieraient ensuite;

» 2. Il faut encore moins songer à la descendance des *Clydosterna*, des *Lysosterna*, à cause des motifs ci-après :

» *a*) L'assemblage des pédoncules et des plaques costales montre

---

([1]) Cfr Rutimeyer, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 152. [Peut-être est-elle le type d'une famille nouvelle. (Baur.)]

([2]) Cope, *The Vertebrata of the tertiary formations*, etc., p. 113.

([3]) Mantell, *Geology of S. E. of England*, p. 255 (1883.)

([4]) Dollo, *Première note sur les Chéloniens de Bernissart*, op. cit., p. 78.

([5]) R. Lydekker and Boulenger, *Notes on Chelonia*, op. cit., p. 273.

([6]) L. Dollo, *Revue des questions scientifiques*, 20 juillet 1887, p. 331.

([7]) L. Dollo, *Première note sur les Cheloniens du Bruxellien*, op. cit., p. 83.

que leur réunion a dû avoir lieu, phylogénétiquement, quand il y avait encore des fontanelles dans la carapace, ce que confirme l'embryogénie.

» β) Durant l'ontogénie, les pédoncules sont déjà bien conformés pendant que de larges fontanelles persistent encore, notamment au plastron. Si donc le plastron des *Lysosterna,* qui est privé de fontanelles, venait à développer des pédoncules, il ne se produirait point un être équivalent à un membre du groupe des *Clydosterna.*

» On aurait bien atteint le même résultat — fontanelles oblitérées et pédoncules axillaires et inguinaux, — mais par deux voies essentiellement opposées ».

Ces raisons seraient convaincantes s'il s'agissait d'une seule famille, mais non pas d'un groupe très étendu d'animaux. En effet, ne pourrait-on pas rencontrer un *Émydidé* (par l'ensemble de son organisation) dactyloplastre, avec fontanelles dans le plastron, avec des pédoncules axillaires et inguinaux peu développés, faisant le passage à un autre avec des pédoncules plus développés, un plastron plus ossifié, etc., pour aboutir à nos Émydidés actuels? L'embryogénie nous autorise à le penser. *Tropidemys* ne serait-elle pas une de ces formes?

Les mêmes modifications peuvent avoir eu lieu, plus ou moins parallèlement, dans les autres groupes; en d'autres termes, chaque famille des *Cryptodira* peut avoir eu son évolution propre, comme semble l'indiquer déjà l'existence d'un *Émydidé* avec peau molle à côté de *Chélydroïdes* également à peau molle? Nous ne pouvons pas placer toutes les *Cryptodères* dans une seule série; nous croyons que, issues d'une souche unique, les diverses familles ont évolué dans des directions différentes, à partir d'un moment où elles possédaient encore des caractères primitifs, tels que, peut-être, des fontanelles au plastron, des pédoncules rudimentaires, des digitations, etc. Par conséquent il nous semble plus scientifique et plus prudent de tenir compte de l'ensemble de l'organisation, plutôt que d'un caractère unique. S'il s'agissait d'une famille unique, nous adopterions sans hésiter les vues de MM. Cope et Dollo, mais quand

il s'agit d'un groupe si complexe, il nous semble dangereux de les appliquer.

En tenant compte de l'ensemble de l'organisation, on reconnait quatre types fondamentaux dans les *Cryptodira* :

1° Les tortues marines actuelles et les formes fossiles désignées sous le nom de *Propleuridæ*, dont les caractères ont été donnés;

2° Les formes vivantes et fossiles [1] qui ont des affinités étroites avec *Chelydra*, dont la carapace est plus ou moins développée, le plastron typiquement en croix, avec ou sans fontanelles, des pédoncules axillaires et inguinaux peu développés, une pièce nuchale avec des traces de côtes, des vertèbres caudales opistocœles, procœles et amphicœles (Baur), un carpe et un tarse assez primitifs, souvent une queue très longue et couverte de scutes osseux, une voûte temporale construite d'après un type différent de la voûte temporale des autres *Thecophora*, etc.

Les *Chélydroïdes* comprennent les *Pseudotrionycidæ* de Dollo, caractérisés fondamentalement par leur peau molle; les *Baënidæ* [2] (comprenant *Platychelys*, Mey., *Baëna* [3], Leidy ?, *Polythorax*, Cope), caractérisés par la présence d'un mésoplastron et de plaques intergulaires (Cope). Enfin les *Chelydridæ*, se rattachant à nos *Chelydra* actuelles.

Pour autant que nous les connaissons, les *Adocidæ* ressemblent [4] assez aux *Baënidæ*, d'un côté, et à *Dermatemys* [5], d'un autre côté, pour qu'on doive les placer également, du moins provisoirement, parmi les *Chélydroïdes*.

---

(1) *Chelydra, Gypochelys, Platysternon, Helemys, Platychelys, Anostira, Pseudotrionyx, Tretosternon, Thalassemys, Dermatemys, Baëna*, etc.

[M. LYDEKKER, *On romains of eocene and mesozoic Chelonia*, etc., (QUATERLY JOURNAL G. S., May 1889. p 233) range les *Propleuridæ* de MM. Dollo et Cope dans les *Chelonidæ*.]

(2) COPE, *The Vertebrata of the tertiary formations*, etc., p. 112.

(3) LEIDY, *Geological Survey Wyoming*, 1870, p. 367. — ID., *Survey Montana*, 1871, p. 368. — ID., *Annual Report U. S. Geolog. Surv. Territ.*, 1872, p. 621. — COPE, *The Vertebrata of the tertiary*, etc., 1883, p. 144.

(4) COPE, *ibid.*, p. 144.

(5) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten*, etc., pp. 152 et 153.

Ces deux dernières familles semblent rattacher plus ou moins les *Cryptodères* aux *Pleurodères* (Cope et Rutimeyer);

3° Les véritables *Émydes*, parmi lesquelles il faudra distinguer divers groupes secondaires. Cette tribu, d'ordinaire mal définie, avait au commencement une très grande extension; on en a retranché successivement les *Pleurodères*, les *Chelydroïda*, et il est arrivé (ce qui est assez général dans des cas analogues, comme pour les *Passereaux*, parmi les oiseaux) qu'elles sont plutôt définies par des caractères négatifs que par des caractères positifs. Nous réunissons sous le nom d'*Emydoïda* toutes les tortues amphibiotiques, avec bassin libre, à plastron étendu (parfois mobile), à carapace bombée, des vertèbres caudales normales, sans voûte protégeant les muscles temporaux, d'ordinaire avec trois séries de phalanges ([1]).

De même que les *Chélydroïdes* et les *Pleurodères*, les *Emydoïda* ainsi définis renferment des formes avec la surface des os dermiques sculpturée, en d'autres termes, avec une peau molle; ce sont les *Apholidemys* de Pomel. Par le même motif que dans les *Chélydroïdes* et les *Pleurodères*, il y a lieu de créer pour ces formes primitives une famille nouvelle, pour laquelle nous proposons le nom d'*Apholidemydida*. Les autres familles de cette tribu seront les *Cinosternidæ*, les *Cistudinidæ* et les *Emydidæ*;

4° Les tortues terrestres, *Testudinides;* cette famille est adoptée par tous les naturalistes.

[Dans la classification de M. Boulenger, cette famille a une plus grande extension; elle englobe un grand nombre d'*Émydes*. Le motif en est, peut-être, dans le fait qu'il est difficile de caractériser les *Emydoïda*. Cependant les tortues terrestres forment un groupe bien délimité, avec des caractères bien tranchés,

---

([1]) Toutes les Élodites examinées par Rutimeyer avaient trois phalanges aux trois doigts médiants, deux au pouce. Le nombre des phalanges du cinquième doigt varie : *Cistudo europæa et guttata* en ont deux au cinquième doigt, ainsi que *Emys caspica, Chelodina longicollis*. — *Chelydra serpentina, Chelys fimbriata, Platemys Geoffroyi, Elseya latisternum* en ont trois au cinquième doigt. (RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten von Solohurn*, etc., p. 123.

comme Rutimeyer l'a si bien montré (1). C'est, croyons-nous, une famille bien délimitée et qui doit être conservée, comme la plupart des auteurs l'ont fait.]

Pleurodères.

La première classification des Pleurodères, proposée par Baur, adoptée et complétée par Boulenger, ne tient pas compte suffisamment des espèces fossiles, elle est incomplète. Les espèces tertiaires, à la vérité, se laissent cataloguer dans l'une des trois familles; mais tel n'est pas le cas des secondaires. Ainsi *Plesiochelys*, Rutimeyer, ne peut prendre place parmi les *Pelomedusidæ*, à cause de l'absence de mésoplastron; ni parmi les *Chelydidæ*, à cause de son crâne, si toutefois le crâne attribué à *Plesiochelys* lui appartient; ni parmi les *Carettochelydidæ*, à cause de ses écailles cornées.

Il semble également incontestable que *Idiochelys* (= *Chelonemys*) est *Pleurodère* (2); cette espèce est dans les mêmes conditions que *Plesiochelys*. Malheureusement nous connaissons trop imparfaitement ces espèces pour pouvoir compléter la classification. Le crâne de *Craspedochelys*, le bassin d'*Idiochelys*, les vertèbres cervicales de ces espèces et celles de *Plesiochelys* nous sont inconnues ou incomplètement connues.

Cependant pour *Plesiochelys* (3), qui a joué un rôle si considérable, comme les recherches de MM. Lydekker et Boulenger (4) le montrent encore récemment, on peut créer une famille nouvelle, les *Plesiochelydidæ*, qui auraient comme caractères : *pas de mésoplastron, carapace et plastron avec fontanelles persistantes ou s'oblitérant très tardivement, muscles temporaux protégés par une voûte osseuse, bassin soudé incomplètement au plastron; tortues secondaires*. On pourrait ranger dans cette famille toutes les espèces de *Plesiochelys*, peut-être aussi *Craspe-*

---

(1) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 27.

(2) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 124. — COPE (*The Vertebrata of the tertiary*, etc., p. 112) place *Idiochelys* avec *Hydropelia* parmi les *Chélydroïdes*, avec une longue ligne de contact entre le plastron et la carapace.

(3) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 48.

(4) R. LYDEKKER and BOULENGER, *Notes on Chelonia*, etc., p. 272.

dochelys et *Idiochelys* ([1]). Les premières ont des pièces neurales presque complètes et une carapace solide; les dernières ont les pièces neurales réduites et une carapace plus mince.

[Les caractères de *Proganochelys*, Baur, ne permettent de placer cette tortue dans aucune des famille de tortues proposées. En attendant que l'on connaisse mieux et cette espèce et les autres Pleurodères fossiles, l'adoption de la famille des *Proganochelydidæ* est parfaitement justifiée.

Quant à la subdivision des Pleurodères en nombreuses familles, proposée également par M. Baur, elle n'est pas appuyée sur des caractères assez importants pour pouvoir être adoptée. Nous adoptons la classification de M. Boulenger.]

Le tableau suivant résume la classification que nous proposons.

Ordo. CHELONIA.

- Sectio I. ATHECA.
  - Fam. 1. *Sphargididæ*.
  - — 2. *Protostegidæ*.
- Sectio II. TRIONYCIDA. Fam. : *Trionycidæ*.
- Sectio III. CRYPTODIRA.
  - Tribus *A*. CHELONOÏDA.
    - Fam. 1. *Cheloniadæ*.
    - — 2. *Propleuridæ*.
  - Tribus *B*. CHELYDROÏDA.
    - Fam. 1. *Pseudo trionycidæ*.
    - — 2. *Baënidæ*.
    - — 3. *Adocidæ*.
    - — 4 *Chelydridæ* ([2]).
  - Tribus *C*. EMYDOÏDA.
    - Fam. 1. *Apholidemydidæ*.
    - — 2. *Cinosternidæ*.
    - — 3 *Cistudinidæ*.
    - — 4. *Emydidæ*.
  - Tibus *D*. TESTUDINIDA. Fam. : *Testudinidæ*.
- Sectio IV. PLEURODIRA.
  - Fam. 1. *Carettochelydidæ*.
  - — 2. *Plesiochelydidæ* ([3]).
  - — 3 *Pelomedusidæ*.
  - — 4. *Chelydidæ* ([4]).

([1]) [LYDEKKER, *On remains of eocene and mesozoic Chelonia*, etc, Q. J. G. S., mai 1889, p. 228, place également *Idiochelys* parmi les *Pleurodères*]

([2]) [Nous croyons qu'il faudra adopter également la famille des *Dermatemydidæ*, proposée par M. Baur]

([3]) [M. Baur a la priorité de ce nom; cependant nous pouvons observer que, lors de l'envoi de notre manuscrit, M. Baur ne l'avait pas encore proposé.]

([4]) [Il faudra ajouter probablement les *Proganochelydidæ* de M. Baur.]

VII. *Examen des classifications* (suite).

Système de Linné.

Linné, et à sa suite Gmelin, Daudin, Ritgen, Wagler, Fitzinger et Mayer, sous des dénominations différentes, divisent les tortues en trois groupes, d'après la nature des extrémités. Il est inutile de démontrer que cette classification, basée sur des données insuffisantes, parfois erronées, est tout à fait artificielle. Elle méconnait l'importance des *Athecæ*, des *Pleurodira* et des *Trionycida*. Elle réunit en un groupe des tortues qui ont plus de différence entre elles que les tortues *terrestres* et les tortues *fluviatiles* ordinaires, *Emydida* par exemple. Elle a été jusqu'à un certain point préjudiciable à la science, car elle a empêché de reconnaître les *groupes* naturels; on se contentait trop de reconnaitre les caractères extérieurs des animaux. Enfin, elle a fait commettre des erreurs matérielles, puisque, comme Strauch le dit, il y a des tortues avec membranes natatoires sans régime amphibiotique.

Système de Klein.

La classification primordiale de Klein, adoptée et amplifiée par Lacépède, Brongniart, Latreille, Oppel, Merrem, Haworth, Bell, plus ou moins par Gray, et enfin par Agassiz, a déjà été examinée. Malgré la brillante et longue exposition de cette subdivision fondamentale en deux groupes, par Agassiz, il est impossible de s'y rallier. Le savant américain expose longuement et amplifie le caractère des membres en nageoires et le peu de développement des membres postérieurs. Mais il ne tient pas assez compte de l'ensemble des caractères. Les *Propleuridæ* d'ailleurs, amenant une transition insensible entre les *Chelydroïdæ* et les *Cheloniidæ,* montrent que la subdivision de l'ordre en deux sous-ordres est inacceptable. Ce système a d'ailleurs le grave tort de méconnaître les véritables caractères des *Athecæ* et leur position systématique, ainsi que celle des *Trionycidæ* et des *Pleurodira*. Agassiz voyait déjà le défaut de sa méthode quand il hésitait à faire des *Trionycidæ* un sous-ordre indépendant.

Fleming

La méthode de Fleming, basée sur la mobilité de l'exosquelette, est certes artificielle et nous n'avons pas à nous y arrêter. Ces sortes de classifications ont eu leur valeur, parce qu'elles servaient de table dichotomique, en quelque sorte, pour retrouver le nom des animaux. En tout cas, elles avaient plus de valeur que les méthodes appuyées sur des données erronées. La classification des animaux, basée sur des caractères extérieurs seulement, amenait des associations bizarres, comme *Chelys* et *Trionyx* dans la méthode de Fleming. Nous sommes à l'époque où l'on réunissait les collections, où les matériaux d'étude étaient plus rares et où l'on ne faisait que rarement l'anatomie d'un animal exotique.

Gray (1825).

Si Gray divise, comme Latreille, les Chéloniens en *Cryptopodes* et *Gymnopodes*, il fait cependant faire un progrès considérable à la classification en établissant cinq familles dans l'ordre.

Si le savant auteur était parvenu à reconnaître les *Pleurodères*, sa classification eût été parfaite pour l'époque où il écrivait. La subdivision des *Emydidæ*, d'après la nature du rostre et de la mandibule, ainsi que de la mobilité du plastron, est assez artificielle.

Comme nous l'avons déjà dit, les *Chelidinæ* de Gray ne correspondent pas à nos *Pleurodères* ou *Chélydes*; elles ne comprennent que le seul genre *Chelys*. On connaissait encore trop peu de *Chélydes* pour saisir les affinités multiples de ce groupe si naturel.

Pour la première fois les *Trionyx*, les *Sphargis* et les *Chelone* sont élevés au rang de familles; aussi les termes de Gray doivent-ils avoir la priorité (1).

(1) C'est le cas pour les *Sphargididæ*, les *Chelonidæ*, les *Testudinidæ* et les *Trionycidæ*.

Fitzinger (1826).

La méthode de Fitzinger n'est pas aussi parfaite que celle de Gray. Les *Chelone et les Sphargis* restent dans une même famille. La famille des *Chélydes* ne renferme que le genre *Chélys*, et les tortues *Pleurodères*, connues de l'auteur, sont rangées parmi les *Émydoïdes*. Ce système montre que son auteur était parfaitement au courant de la littérature des tortues et connaissait leur anatomie. Aucun des noms proposés ne peut être adopté, parce que les termes de Gray ont la priorité et parce que, pour la famille des *Chélydes*, l'auteur ne l'entend pas dans le même sens que les naturalistes actuels.

Bell (1825 et 1826).

Le système de Bell est identique à celui de Gray, avec la différence que Bell subdivise les *Emydidæ* en deux groupes, comprenant le premier les tortues qui ont le plastron mobile et dans lequel il range à la fois des *Cryptodères* (*Terrapene*) et des *Pleurodères* (*Sternothærus*); le second comprend les tortues qui ont le plastron immobile et renferme également des *Cryptodères* et des *Pleurodères*.

Gray (1831).

A la suite de Wagler, Gray a reconnu les affinités multiples des tortues d'eau douce qui ont le bassin soudé, et il en fait une famille sous le nom de *Chelydidæ*, ce qui est une modification des plus heureuses. Malheureusement il abandonne la famille des *Sphargididæ* et range de nouveau le *Sphargis* avec les *Cheloniadæ*, trompé par la ressemblance des membres et du crâne, ainsi que par leur genre de vie commun. Wiegmann et Rute adoptèrent cette classification, en changeant les noms des familles.

Bonaparte.

Le prince de Canino n'a guère développé les motifs qui l'ont amené à sa classification des tortues en trois familles. Les

recherches de Wagler, Fitzinger, Gray lui ont échappé ou il n'en a pas tenu compte. Sa classification ne repose que sur des caractères tout à fait extérieurs. Les *Testudinidæ* sont caractérisées par leurs pieds digités, leurs écailles cornées et leur tympan visible, et elles sont divisées d'après leurs lèvres, observation partiellement erronée, d'après Strauch ; plus tard il les subdivise en quatre groupes, qui sont mal définis. Nous ferons la même observation pour les deux autres familles.

Duméril et Bibron.

Il est regrettable que ces deux éminents naturalistes, qui avaient à leur disposition des matériaux si étendus, se soient tant appuyés sur les caractères extérieurs, si changeants, si fallacieux, et qu'ils se contentassent de sentir « du doigt » si le plastron était complet ou incomplet. Ayant à leur disposition des sujets adultes et jeunes de *Sphargis*, ils n'ont pas étudié la singulière carapace de ces animaux. Cependant leurs patientes recherches ont donné une impulsion considérable à l'étude des tortues.

Leur classification doit être rangée parmi les systèmes artificiels. Il n'ont pas su reconnaître l'indépendance du groupe des *Chélydes ou Pleurodères* ni celle du *Sphargis*, parce qu'ils fondaient leur classification sur la nature des pieds. Aussi Strauch, qui accordait également une valeur prépondérante aux caractères extérieurs et ne voulait pas tenir compte des caractères anatomiques, parce qu'ils ne sont pas visibles, montre, au commencement de ses « *Chelonogische Studien* » que la distinction des *Chersites* et des *Élodites*, telle qu'elle est faite par Duméril et Bibron, ne s'appuie que sur des caractères de plus ou moins d'importance, ou d'importance tout à fait secondaire et, dépassant ses prémisses, il réunit ces deux familles en une seule.

Swainson.

Trompé également par les apparences, Swainson a édifié un système où les affinités réelles des animaux sont complètement

méconnues. Ses *Chelidridæ* renferment à la fois des formes *Cryptodères* et *Pleurodères,* ainsi que ses *Emydæ*. Nous avons déjà rencontré les motifs sur lesquels ce naturaliste s'appuyait.

Leconte.

Le système de Leconte s'appuie sur des caractères extérieurs et ostéologiques; il s'écarte des classifications de Gray, Bell, etc., en ce qu'il réunit en une famille unique *Chelydra, Staurotypus, Trionyx* et *Emyda,* parce que les ailes latérales du plastron, qui réunissent ce dernier à la carapace, sont formées par les hypoplastrons seulement et non par les hyo- et hypoplastrons, comme ailleurs. Cette fusion n'est pas admissible :

1° Elle ne tient pas compte des nombreux caractères différenciels existant entre ces animaux;

2° Ce caractère n'est pas si tranché. En effet les ailes hyoplastrales peuvent se développer à l'âge adulte et atteindre également la carapace, dans les *Chélydroïdes* et les *Cinosternum* [1].

Gray (1855).

Excepté pour les *Sphargis,* dont l'anatomie était suffisamment connue, mais dont l'importance échappait encore aux naturalistes, parce que les espèces fossiles apparentées leur étaient inconnues, la classification de Gray de 1855 était parfaite pour l'époque. L'étude des fossiles n'avait pas encore montré les relations intimes qui réunissent les *Cryptodères* entre elles, ni l'importance du groupe dont *Chelydra* est le type dans le monde actuel. Les cinq familles sont bien caractérisées. Mais la diagnose ne cadre plus avec les progrès de la science. En effet, nous avons aujourd'hui des *Emydidæ* et des *Chelydidæ* avec peau molle; Gray donne une trop grande importance à la séparation de la plaque caudale et à la contractilité du cou, comme Strauch l'a fait voir.

---

[1] RUTIMEYER, *Ueber den Bau, etc.*, p 19.

Rien ne justifiait les modifications des termes introduites par l'illustre naturaliste en 1870. Ces termes « éclectiques » ne font qu'encombrer la science. Gray voulait établir une certaine symétrie entre les groupes. L'ordre était divisé en sous-ordre, le sous-ordre en familles, la famille en tribus. Nous ne voyons pas la nécessité de la multiplicité de ces termes; quand le sous-ordre des *Tylopoda* ne renferme qu'une seule famille, pourquoi créer un nom spécial pour le sous-ordre et la famille ? On ne doit conserver que le nom de la famille, qui alors a le rang de sous-ordre. De plus, il n'y a pas de symétrie entre les divers groupes zoologiques. Que de divisions et de subdivisions n'a-t-on pas dû établir pour les *Dinosauriens!* Ils sont justifiés, mais que deviendrait la science si pour les *Rhynchocéphaliens* on créait un nom pour l'ordre, la section, la tribu et la famille.

Enfin Gray divise la famille en tribus; n'est-ce pas l'inverse qu'il faut ? On semble d'accord pour diviser la famille en *genres* et non pas en tribus.

Les tortues terrestres sont désignées sous le nom de *Testudinidæ* en 1855, de *Tylopoda* en 1870, de *Testudinata* en 1873.

La subdivision des *Tylopoda* ou *Testudinidæ* en quatre tribus (1870) ou en quatre sections et sept tribus (1873) ne peut être justifiée que si l'on admettait que pour chaque genre il faille créer un nom *collectif.* Ces tribus ou sections ne s'appuient que sur des caractères superficiels, incomplets, tels que la *surface alvéolaire* (1873).

Il faut dire la même chose de la division des *Stéganopodes* en huit familles, des *Pleurodères* en quatre familles et des *Trionychoïdes* en trois. Ainsi les nombreuses espèces du genre *Clemmys*, que Strauch conserve dans un même genre, se répartissent en cinq familles, quand d'autres auteurs y reconnaissent à peine plusieurs genres. Ces familles sont fondées sur « sehr (1) vage und veränderliche Charactere » et peuvent à peine être acceptées « als Divisionen, geschweige denn als Gattungen ».

---

(1) STRAUCH, *Chelonologische Studien*, p. 29.

Dans la classification des Pleurodères, Gray n'a pas distingué les caractères communs des deux premiers groupes réunis en une famille si naturelle par Boulenger, ni ceux de deux autres groupes. Cependant ces groupes des *Pleurodères* ne sont pas aussi artificiels que ceux des *Testudinidæ,* et quelques-uns seraient bien des sous-divisions de familles.

Agassiz.

Agassiz a eu partiellement le même tort que Gray. Sa subdivision fondamentale de l'ordre en deux sous-ordres lui a fait méconnaître l'unité et l'importance du groupe des *Pleurodères* et des *Trionycidæ,* ainsi que l'importance des *Athecæ.* La paléontologie doit guider le naturaliste qui veut établir un système complet. Il est vrai, Agassiz a reconnu et parfaitement bien défini les caractères des divers groupes; mais, comme Gray, il donnait une trop grande importance à des caractères de second ordre ([1]), et il ne considérait que les tortues de l'Amérique du Nord, ou principalement celles-ci.

Ainsi, il subdivise en trois sous-familles les nombreuses espèces du genre *Clemmys* (= *Emys* de quelques autres auteurs). Strauch ([2]) dit très bien de cette division qu'elle est basée sur des caractères variables, de plus ou de moins, « und dabei so vag und unbestimmt dass die Grenzen der einzelnen Subfamilien unmöglich mit Sicherheit bestimmt werden können ».

Son opinion sur les Pleurodères ne peut être acceptée. Que si *Chelys* a des caractères spéciaux, ceux-ci sont partagés dans une certaine mesure par *Chelodina* et *Hydromedusa,* et par *Hydraspis, Elseya,* etc. dans une moindre proportion, mais suffisante pour les réunir toutes dans les *Chelydidæ* (Boulenger).

([1]) Définissant les *Necteınydoïdæ* (p. 355), il dit : « The body is rather flat... »; — les *Deirochelyoïdæ* : « The body is higher and more elongated... The plastron is narrower than in the preceding tribe... »; les *Emydoïdæ* : « Differ chiefly from the preceding by the great width and flatness of the plastron... etc. » Ce sont autant de caractères qui peuvent à peine servir à distinguer les espèces, si l'on tient compte des différences sexuelles.

([2]) Strauch, *Chelonologische Studien*, p. 34.

Ici surtout on observe que le défaut de matériaux (avoué d'ailleurs) lui a fait méconnaître les véritables affinités zoologiques.

Rutimeyer.

Le savant naturaliste suisse insiste sur les affinités des animaux qu'il désigne sous le nom de *Thalassémydes* avec les *Chelone* et les *Chélydroïdes* actuels. Mais la circonstance que ces animaux sont du jurassique doit donner à réfléchir : à cette époque, les *Cryptodères*, issues, récemment peut-être, d'un ancêtre commun, doivent présenter entre elles des affinités multiples, même chez celles qui appartiennent à des familles différentes. En rapport avec l'âge géologique, les *Thalassémydes* ont le plastron et la carapace avec fontanelles, ou se fermant très tardivement, des pédoncules peu développés comme dans nos jeunes *Émydidés* ou nos jeunes *Pleurodères*. De même que, pour la détermination de la place zoologique d'une jeune *Emydida*, on se tromperait grossièrement si l'on ne tenait pas compte des caractères futurs de l'âge adulte, de même, dans les tortues anciennes, on ne doit pas tenir compte exclusivement de l'un ou de l'autre caractère, mais rechercher dans quel sens se fait l'évolution du groupe auquel l'animal appartient (1). En d'autres termes, une *Emydida* ancienne peut être aussi bien dactyloplastre qu'une jeune *Emydida* actuelle.

1° *Platychelys Oberndorferi* est *Chélydroïde*, comme les caractères de sa carapace, comme son crâne (si le crâne que lui attribue Rutimeyer (2) lui appartient réellement) le démontrent.

2° Quant à *Thalassemys*, *Tropidemys*, *Eurysternum*, nous croyons devoir les ranger parmi les *Émydidés :* ce seraient des formes anciennes de ce groupe. Nous admettons qu'elles ont des ressemblances avec les *tortues marines* et les *Chelydridæ*, mais comme précisément ces tortues sus-mentionnées ont conservé un grand nombre de caractères primitifs, il est possible que ces mêmes caractères dans les *Thalassémydes* ne démon-

(1) On y parvient en considérant l'ensemble des caractères; et non pas les modifications d'un seul organe ou d'un seul caractère.

(2) Rutimeyer, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 101. — Cfr Cope, supra.

trent que la conservation de caractères anciens dans un groupe appelé à évoluer plus tard. En effet :

a) Le plastron de ces tortues est étendu.

b) La ligne de contact entre le plastron et la carapace est très longue ou serait très longue si les fontanelles étaient oblitérées : elle s'étend chez *Tropidemys* de marginale 3 à marginale 8 ; néanmoins elle est moins étendue chez *Thalassemys*.

c) Leur carapace est très développée et souvent massive.

d) Les pédoncules axillaires et inguinaux sont plus ou moins développés, atteignant cependant parfois les pièces costales, notamment à l'âge adulte.

e) Les fontanelles s'oblitèrent successivement avec l'âge.

De plus

f) La pièce nuchale ne présente pas les caractères de la pièce nuchale des *Chélydroïdes* (trace de côtes), desquelles on veut les rapprocher.

g) La première côte n'est pas aussi allongée, etc.

h) Aucun autre caractère (crâne, mandibule, vertèbres caudales) n'autorise à les placer parmi les *Chélydroïdés*, du moins avec certitude.

De plus, leurs membres les excluent complètement des *Chéloïdés*.

Nous croyons, par conséquent, que ces espèces sont des *Émydoïdés*, arrêtées à un stade embryonnaire et, en les plaçant dans les *Dactyloplastres*, non loin des tortues marines et près des *Chélydridés*, on méconnait leur véritable parenté. Un jour, on créera pour elles une subdivision dans cette famille naturelle, à côté des *Émydidés* récentes : on aura, peut-être, des *Palæoémydidés* à côté des *Néoémydidés*.

Quant aux *Chélonémydes* de Rutimeyer, autre groupe provisoire, il y a à distinguer entre *Ch. crassicostata*, *Ch. planimentum* et les autres *Chelone*. Les prèmières sont classées parmi les *Propleuridæ*, cette famille si naturelle de tortues, qui fait le passage des *Chélonées marines* aux *Chélydroïdes*. Nous croyons que les autres sont des tortues marines véritables ou *Chéloniadés*. En effet :

a) Le crâne est construit d'après le type thalassite.

b) Si le plastron est plus ossifié que dans les *Cheloniadæ* actuelles, il est néanmoins construit d'après le plan du plastron de ces dernières et non pas d'après celui des tortues d'eau douce ; en effet : α) L'entoplastron est allongé. — β) Les épiplastrons sont plus divergents que chez les tortues d'eau douce. — γ) Les xiphiplastrons s'engrènent avec les hypoplastrons par une suture plus ou moins oblique à l'axe de l'animal et non par une suture transversale.

c) Si on ne connait pas les membres, on connaît du moins le coracoïde, l'humérus, etc., qui s'écartent des mêmes os des *Élodites* et se rapprochent des os des *Cheloniada* ([1]).

d) Il serait bien étonnant que Owen n'ait eu, parmi tant de squelettes, que des restes de jeunes individus, comme le suppose Rutimeyer.

e) Les *Chelone* décrites par Owen ont trois supracaudales, tandis que la plupart des Élodites n'en ont que deux.

f) Plusieurs tortues anciennes sont des types collectifs, possédant des caractères qui sont aujourd'hui communs à plusieurs groupes. Il faut leur assigner une place d'après l'ensemble de leur structure. Tant qu'on n'aura pas démontré qu'Owen s'est trompé en attribuant à ces *Chelone* des membres en nageoires, nous devons classer ces formes parmi les tortues marines actuelles, dont elles seraient des formes bien anciennes, quoi qu'on ait déjà des *Chelone* véritables, comparables aux actuelles, dans l'époque crétacée.

On objectera, peut-être, que l'ossification de la carapace et du plastron est plus complète que dans nos *Chelone* actuelles. Rien n'est plus complexe, rien n'est plus variable que l'évolution ; comme Carl Vogt le dit, dans un arbre phylogénétique il y a des branches *descendantes*, c'est-à-dire que l'évolution procède par rétrogradation. Il est aussi probable que les tortues marines dérivent de Chéloniens amphibiotiques ou terrestres ; rien n'est

---

([1]) Owen, *Monograph on the fossil Reptilia of the London Clay*, Part. I. *Chelonia*. London 1849, p. 14, 17, 19, 25, 30, etc.

donc plus naturel que de trouver des tortues marines avec une carapace et un plastron plus ossifiés que les *Chélonées* actuelles, bien que nous ayons déjà de véritables *Chelone* au crétacé, car on ne peut admettre que l'évolution se fasse simultanément dans toutes les mers ni pour toutes espèces d'un même groupe.

Paul Gervais.

Dans son manuel de zoologie, P. Gervais n'a guère donné de diagnose des groupes zoologiques.

Il est étrange que cet éminent naturaliste réunisse encore en 1875 les *Élodites* de Dum. et Bib. sous le nom d'*Émydes*, terme qui sert communément à désigner les *Élodites cryptodères*. La diagnose des *Sphargis* est incomplète, puisqu'on ne peut faire entrer dans ce groupe, ainsi défini, ni *Protostega*, ni *Protosphargis*, inconnus d'ailleurs à l'époque où P. Gervais éerivait.

Seeley (1880).

Quoique la classification de Seeley se rapproche de celle que nous croyons devoir adopter, elle est néanmoins fondée sur des caractères insuffisants et la diagnose des groupes est très incomplète.

En effet, il n'y a pas trois types de carapace; il n'y en a que deux : la carapace en mosaïque des *Sphargididæ* et la carapace typique des *Thecephora*, qui existe aussi à l'état rudimentaire dans les *Athecæ*.

Parmi les *Aspidochelyidæ*, il faut placer des tortues qui ont le corps couvert d'une peau molle et la carapace vermiculée (*Anostira*, *Pseudotrionyx*, etc.).

Le caractère granulé de la carapace des *Peltochelyidæ* n'est pas exclusif dans les tortues fluviatiles, comme nous le disons, et cette carapace n'a pas l'origine que lui attribue Seeley; elle a la même origine que celle des *Aspidochelyidæ*.

La diagnose des *Dermatochelyidæ* ne s'applique qu'aux genres *Sphargis*, *Psephophorus*, *Psephoderma*, et nullement aux *Proto-*

stega et à *Protosphargis,* qui appartiennent incontestablement au même groupe zoologique. La carapace en mosaïque ne suffit donc pas pour caractériser les *Athecæ,* pas plus que leur peau dure et coriace, puisque *Psephophorus rupeliensis* avait probablement le corps couvert d'écailles cornées.

Ajoutons encore que la carapace des *Dermatochelyidæ* n'est pas « *not developped* », mais incomplète ou rudimentaire, et elle n'est pas non plus « represented », mais remplacée fonctionnellement par la carapace en mosaïque.

Cope.

Nous avons déjà discuté la plupart des modifications introduites par Cope dans la systématique des Chéloniens. Ainsi que le tableau phylogénétique l'indique, Cope considère les *Trionyx* comme un groupe primitif dont il dérive l'ensemble des Pleurodères et la presque totalité des Cryptodères (les *Chelonoïdæ* exceptées). « Trionyx appears, dit-il ([1]), to represent another point of departure. Its plastron presents a grade of development near to that of *Propleura,* and its eight costal bones ally it to other types. In its half-ossified carapace wanting the marginals, it is inferior to both. It leads us at once to the existing *Chelydra,* the closing of the sternal fontanelles being accompanied by a contraction of its extent in respect to the bridges and lobes ».

Jusqu'à présent cependant, les preuves manquent pour justifier cette filiation. De son côté, Baur dit ([2]) : « Die Form des Plastrons der *Trionychidæ* ist von einer embryonalen Plastronform, z. B. von *Emys* ableitbar. Denkt man sich das mediane Stück des Entoplastrons von *Emys* zurückgebildet, die seitlichen Stücke aber mehr und mehr entwickelt, so dass das Epiplastron aus der Vereinigung mit dem Hyoplastron verdrängt wird, so haben wir das Plastron der *Trionychidæ* vor uns. Wir können

---

([1]) Cope, *The Vertebrata of the tertiary formations,* etc., p. 114.

([2]) Baur, *Ueber die Stellung der Trionychidæ zu den übrigen Testudinata.* Zoologischer Anzeiger, n° 244, 1887.

uns also das Plastron der *Trionychidæ* durch Specialisation eines ursprünglichen Emyden-Plastrons hervorgegangen vorstellen ».

Le R. P. Heude (1), de son côté, a montré que le nombre des pièces costales varie de 7 à 9 dans les *Trionycidæ;* la ressemblance avec les *Propleuridæ* n'est que bien secondaire. Jusqu'à présent, tous les *Trionycida* décrits et connus forment un groupe bien homogène, à tel point que la plupart ont été désignés sous le nom de *Trionyx*. Quelques découvertes faites en Amérique semblent jeter un jour nouveau sur cette intéressante famille : les espèces désignées sous le nom de *Plastomenus* (2) par Cope possédant, à côté de caractères incontestablement trionychoïdes, quelques caractères émydoïdes, pourraient fournir des renseignements sur la filiation des *Trionycida*, et nous rapprocher plutôt de l'opinion de Baur que de celle de Cope.

La famille des *Propleuridæ*, établie d'abord par Cope, enfin adoptée et parfaitement définie par Dollo, est fondée sur un ensemble de caractères tel que son acceptation s'impose; mais, par l'ensemble de leur organisation, crâne, carapace, plastron, pédoncules, phalanges sans condyles, membres, etc., les *Propleuridæ* se rapprochent tellement des *Cheloniadæ* que nous les réunissons en une tribu (3) sous le nom de *Chelonoïda*, tribu voisine des *Chelydroïda*.

La famille des *Pleurosternidæ* doit être abandonnée : les espèces qui appartiennent à ce groupe sont *Pleurodères* (4), les unes appartenant aux *Plésiochélydidés* (5), les autres prenant place parmi les *Pelomedusidæ*, du moins provisoirement en attendant que leur crâne soit connu. Les *Pleurosternidæ* d'Owen avaient toutes une plaque intergulaire, contrairement à ce que pensait Cope.

Les *Baënidæ* (avec les vertèbres caudales opistocœles (6)), les

(1) HEUDE, *Mémoire sur les Trionyx*, etc., pp. 31 à 36.

(2) COPE, *The Vertebrata*, etc., pp. 114, 122, etc.

(3) C'est à peu près ce que M. Dollo a fait quand il rangeait les *Propleuridæ* dans sa famille des *Pachyrhynchinæ* (*Première note sur les Chéloniens landéniens*, etc., p. 141).

(4) RUTIMEYER, *Ueber den Bau*, etc., p. 114.

(5) LYDEKKER and BOULENGER, *Notes on Chelonia*, etc., 272.

(6) Comme dans les *Chélydrides* et les *Miolanidæ* de Boulenger, parmi les *Pleurodères*.

Adocidæ (avec les impressions *ligamenteuses* du bassin sur le plastron), pourraient fournir un passage vers les *Pleurodères*, mais le tableau phylogénétique de Cope méconnait leurs affinités avec les *Chelydridæ*.

Nous ne pouvons pas considérer les *Hydraspididæ* comme la souche des trois autres groupes de *Pleurodères* (Cope), parce que *Chelys* a un carpe et un tarse plus primitif que *Hydraspis* (= *Chelodina*); comment pourraient-elles transmettre aux *Podocnemididæ* et aux *Pelomedusidæ* leur voûte temporale atrophiée et un mésoplastron dont elles n'ont pas de trace ?

Si des *Emydidæ* on peut passer aux *Cistudinidæ* et aux *Cinosternidæ* par rétrogradation, comme Carl Vogt veut que l'on procède, cependant l'histoire paléontologique ne justifie pas encore cette descendance, pas plus que celle des *Testudinidæ* des mêmes animaux.

Les *Cheloniidæ*, les *Propleuridæ*, les *Chelydroïdes* ont des affinités trop multiples pour ne pas les supposer descendues d'un même ancêtre. Peut-être *Cope* a-t-il raison de donner une grande importance aux *Protostegidae*, desquels on pourrait remonter aux *Cheloniidæ;* mais pourquoi s'arrêter là ?

En somme, faute de documents paléontologiques, nous n'en sommes encore qu'à faire des conjectures ; tout est hypothétique, et nous devons nous garder de prêter « à la nature le plan que nous avons élaboré dans notre cerveau » [1].

Les opinions des autres auteurs ont été rencontrées dans les chapitres V et VI.

---

[1] Carl Vogt, *op. cit.*, p. 481.

TABLE DES MATIÈRES.

SUR

UNE

FORMULE DE M. DARBOUX

PAR

P. MANSION

Professeur à l'Université de Gand.

---

1. *Aperçu général de la démonstration.* Soit Fz une fonction d'une variable z réelle ou imaginaire, continue ainsi que ses $(2n+1)$ premières dérivées pour toutes les valeurs de la variable depuis a jusque $z = a + h$. On aura, comme l'on sait, par le théorème de Taylor :

$$Fz = Fa + \frac{h}{1}F'a + \frac{h^2}{1.2}F''a + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n a + R, \quad (1_0)$$

$$hF'z = hF'a + \frac{h^2}{1}F''a + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}F^n a + R_1, \quad (1_1)$$

$$h^2F''z = h^2F''a + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots(n-2)}F^n a + R_2, \quad (1_2)$$

. . . .

$$h^nF^nz = h^nF^na + R_n; \quad (1_n)$$

puis, R, R_1, R_2,..., R_n seront donnés respectivement par les formules suivantes :

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2...(n+1)} F^{n+1}a + \cdots + \frac{h^{2n}}{1.2...2n} F^{2n}a + \int_a^z \frac{(z-t)^{2n}}{1.2...2n} F^{2n+1}t\,dt, \quad (2_0)$$

$$R_1 = \frac{h^{n+1}}{1.2...n} F^{n+1}a + \cdots + \frac{h^{2n}}{1.2..(2n-1)} F^{2n}a + \int_a^z \frac{h(z-t)^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} F^{2n+1}t\,dt, \quad (2_1)$$

$$R_2 = \frac{h^{n+1}}{1.2...(n-1)} F^{n+1}a + \cdots + \frac{h^{2n}}{1.2...(2n-2)} F^{2n}a + \int_a^z \frac{h^2(z-t)^{2n-2}}{1.2..(2n-2)} F^{2n+1}t\,dt, \quad (2_2)$$

. . . .

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{1} F^{n+1}a + \cdots + \frac{h^{2n}}{1.2...n} F^{2n}a + \int_a^z \frac{h^n(z-t)^{2n+1}}{1.2...n} F^{2n+1}t\,dt, \quad (2_n)$$

Multiplions les équations (2) par des quantités

$$1,\ m_1,\ m_2, \ldots,\ m_n,$$

telles que, dans la somme

$$r = R + m_1R_1 + m_2R_2 + \cdots + m_nR_n,$$

les coefficients de $F^{n+1}a$, $F^{n+2}a, \ldots, F^{2n}a$ soient nuls. On aura alors

$$r = \int_a^z (z-t)^n F^{2n+1}t\varphi\,dt,$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi = \left[\frac{(z-t)^n}{1.2...2n} + m_1h\frac{(z-t)^{n-1}}{1.2..(2n-1)} + m_2h^2\frac{(z-t)^{n-2}}{1.2...(2n-2)} + \cdots + m_nh^n\frac{1}{1.2..n}\right],$$

et, des formules (1), on déduira, en les multipliant aussi par $1, m_1, m_2, \ldots, m_n$,

$$Fz + m_1hF'z + m_2h^2F''z + \cdots + m_nh^nF^nz =$$
$$Fa + M_1hF'a + M_2h^2F''a + \cdots + M_nh^nF^na + r,$$

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ étant des coefficients dépendant de $m_1, m_2, \ldots, m_n$; par exemple,

$$M_k = \frac{1}{1.2\ldots k}\left[1 + m_1 k + m_2 k(k-1) + \cdots + m_k(1.2\ldots k)\right].$$

Nous allons déterminer les quantités $m_1, m_2, \ldots, m_n$, puis r et, enfin, les coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

2. ***Détermination des multiplicateurs m.*** Les multiplicateurs $m_1, m_2, \ldots, m_n$, d'après leur définition, doivent vérifier les n équations :

$$1+m_1(n+1)+m_2 n(n+1)+m_3(n-1)n(n+1)+\cdots+m_n.2.3\ldots(n+1)=0,$$
$$1+m_1(n+2)+m_2(n+1)(n+2)+m_3 n(n+1)(n+2)+\cdots+m_n.3.4\ldots(n+2)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1+m_1.2n+m_2(2n-1)2n+m_3(2n-2)(2n-1)2n+\cdots+m_n(n+1)(n+2)\ldots 2n=0.$$

Introduisons, dans ces formules, les symboles combinatoires

$$C_r^s = \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2.3\ldots s},$$

et posons

$$1.m_1 = p_1,\quad 1.2m_2 = p_2, \ldots,\quad 1.2.3\ldots k m_k = p_k.$$

Les équations en $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ deviendront

$$1 + p_1 C_{n+1}^1 + p_2 C_{n+1}^2 + p_3 C_{n+1}^3 + \cdots + p_n C_{n+1}^n = 0,$$
$$1 + p_1 C_{n+2}^1 + p_2 C_{n+2}^2 + p_3 C_{n+2}^3 + \cdots + p_n C_{n+2}^n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1 + p_1 C_{2n}^1 + p_2 C_{2n}^2 + p_3 C_{2n}^3 + \cdots + p_n C_{2n}^n = 0.$$

Ce système peut être remplacé par un plus simple, en opérant de la manière suivante. On retranche la $(n-1)^e$ équation de la n^e, la $(n-2)^e$ de la $(n-1)^e, \ldots$, la première de la seconde; on opère de même sur les $(n-1)$ nouvelles équations obtenues et, ainsi de suite, pour chaque groupe de nouvelles équations

obtenues. On emploie d'ailleurs, à chaque opération, la formule de réduction

$$C_r^s - C_{r-1}^s = C_{r-1}^{s-1}.$$

On obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned}
1 + p_1 C_{n+1}^1 + p_2 C_{n+1}^2 + p_3 C_{n+1}^3 + \cdots + p_n C_{n+1}^n &= 0,\\
p_1 + p_2 C_{n+1}^1 + p_3 C_{n+1}^2 + \cdots + p_n C_{n+1}^{n-1} &= 0,\\
p_2 + p_3 C_{n+1}^1 + \cdots + p_n C_{n+1}^{n-2} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
p_{n-2} + p_{n-1} C_{n+1}^1 + p_n C_{n+1}^2 &= 0,\\
p_{n-1} + p_n C_{n+1}^1 &= 0.
\end{aligned}$$

La dernière donne

$$p_{n-1} = - p_n C_{n+1}^1 = - p_n C_{n+1}^n,$$

puis, en substituant dans l'avant-dernière et, ensuite, dans celle qui précède, on trouve

$$p_{n-2} = + p_n C_{n+2}^n, \quad p_{n-3} = - p_n C_{n+3}^n.$$

On en conclut, par induction,

$$p_k = (-1)^{n-k} p_n C_{2n-k}^n, \quad 1 = (-1)^n p_n C_{2n}^n.$$

Pour savoir si cette conjecture est fondée, il suffit de vérifier, pour une valeur quelconque de k, de 1 à n, la relation

$$C_{2n-k}^n - C_{n+1}^1 C_{2n-k-1}^n + C_{n+1}^2 C_{2n-k-2}^n - \cdots + (-1)^{n-k} C_{n+1}^{n-k} = 0, \quad (a)$$

qui exprime que les valeurs trouvées par induction satisfont aux n équations en p.

Pour cela, considérons l'expression

$$x^{n+1}(x+1)^{n-k-1} = (x+1)^{n-k-1}(\overline{x+1} - 1)^{n+1},$$

dont tous les termes contiennent x à la puissance $(n+1)$ au moins. Le second membre peut s'écrire

$$(x+1)^{n-k-1}\left\{(x+1)^{n+1} - C_{n+1}^1 (x+1)^n + C_{n+1}^2 (x+1)^{n-1} \ldots + (-1)^{n+1}\right\},$$

ou encore,

$$(x+1)^{2n-k} - C^1_{n+1}(x+1)^{2n-k-1} + C^2_{n+1}(x+1)^{2n-k-2} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-k} C^{n-k}_{n+1}(x+1)^n + \cdots + (-1)^{n+1}(x+1)^{n-k-1}.$$

Le coefficient de x^n dans ce développement doit être nul, comme on l'a vu. Or ce coefficient est précisément le premier membre de la relation (a). Cette relation est donc vérifiée.

Il résulte immédiatement, de ce qui précède, que

$$p_1 = -\frac{C^n_{2n-1}}{C^n_{2n}}, \quad p_2 = \frac{C^n_{2n-2}}{C^n_{2n}}, \quad p_3 = -\frac{C^n_{2n-3}}{C^n_{2n}}, \ldots, p_n = (-1)^n \frac{C^n_n}{C^n_{2n}};$$

$$m_1 = \frac{p_1}{1}, \quad m_2 = \frac{p_2}{1.2}, \quad m_3 = \frac{p_3}{1.2.3}, \ldots, m_n = \frac{p_n}{1.2.3 \ldots n},$$

ou explicitement,

$$m_1 = -\frac{1}{2n}, \quad m_2 = \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1}{2n(2n-1)},$$
$$m_3 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)}, \ldots$$
$$m_n = (-1)^n \frac{1}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}.$$

3. *Calcul de r.* Dans la valeur de r, la quantité sous le signe intégral est, au facteur

$$\frac{(z-t)^n}{1.2 \ldots 2n} F^{2n+1} t \, dt$$

près, égal à l'expression φ. Si, dans celle-ci, l'on fait $k = z - t$, elle devient

$$k^n + p_1 h k^{n-1} \frac{2n}{1} + p_2 h^2 k^{n-2} \frac{2n(2n-1)}{1.2} + p_3 h^3 k^{n-3} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} +$$
$$\cdots + p_n h^n \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}.$$

Remplaçons $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par leurs valeurs. Le polynome précédent deviendra

$$k^n - \frac{2n}{1}\frac{C_{2n-1}^n}{C_{2n}^n}hk^{n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\frac{C_{2n-2}^n}{C_{2n}^n}h^2k^{n-2} - \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}\frac{C_n^n}{C_{2n}^n}h^n,$$

c'est-à-dire, après quelques réductions faciles,

$$k^n - C_n^1 hk^{n-1} + C_n^2 h^2 k^{n-2} - \cdots + (-1)C_n^n h^n = (k-h)^n = (a-t)^n.$$

On a donc enfin, pour l'expression de r,

$$r = \int_a^x \frac{(z-t)^n (a-t)^n}{1.2.3\ldots 2n} F^{2n+1} t \, dt.$$

4. *Calcul des coefficients* M. On trouve immédiatement les formes suivantes pour le coefficient M_k :

$$M_k = \frac{1}{1.2\ldots k}\left[1 + m_1 k + m_2 k(k-1) + m_3 k(k-1)(k-2) + \cdots + m_k(1.2.3\ldots k)\right]$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots k}\left[1 + p_1 C_k^1 + p_2 C_k^2 + p_3 C_k^3 + \cdots + p_k\right]$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots k}\left[1 - C_k^1 \frac{C_{2n-1}^n}{C_{2n}^n} + C_k^2 \frac{C_{2n-2}^n}{C_{2n}^n} + \cdots + (-1)^k \frac{C_{2n-k}^n}{C_{2n}^n}\right]$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots k C_{2n}^n}\left[C_{2n}^n - C_k^1 C_{2n-1}^n + C_k^2 C_{2n-2}^n - C_k^3 C_{2n-3}^n + \cdots + (-1)^k C_{2n-k}^n\right].$$

Pour calculer la quantité entre parenthèses, considérons l'expression

$$x^k (x+1)^{2n-k} = (x+1)^{2n-k} (\overline{x+1} - 1)^k$$

$$= (x+1)^{2n-k}\left[(x+1)^k - C_k^1 (x+1)^{k-1} + C_k^2 (x+1)^{k-2} - \cdots + (-1)^k\right]$$

$$= (x+1)^{2n} - C_k^1 (x+1)^{2n-1} + C_k^2 (x+1)^{2n-2} - \cdots + (-1)^k (x+1)^{2n-}$$

En égalant le coefficient de x^n dans les deux membres de cette égalité, on trouve

$$C_{2n-k}^{n} = C_{2n}^{n} - C_k^1 C_{2n-1}^{n} + C_k^2 C_{2n-2}^{n} - \cdots + (-1)^k C_{2n-k}^{n}.$$

Par conséquent, puisqne

$$C_{2n-k}^{n} = C_{2n-k}^{n-k},$$

on a

$$M_k = \frac{C_{2n-k}^{n-k}}{1.2..k.C_{2n}^{n}} = (-1)^k \frac{p_k}{1.2..k} = (-1)^k m_k.$$

5. *Forme définitive du développement.* On a donc enfin

$$\begin{aligned} &Fz + m_1 hF'z + m_2 h^2 F''z + \cdots + m_n h^n F^n z \\ &= Fa - m_1 hF'a + m_2 h^2 F''a - \cdots + (-1)^n m_n h^n F^n + r, \end{aligned}$$

c'est-à dire

$$Fz - Fa = \frac{1}{C_{2n}^{n}} \Big\{ (z-a) C_{2n-1}^{n} (F'a + F'z) + \frac{(z-a)^2}{1.2} C_{2n-2}^{n} (F''a - F''z) + \cdots$$

$$+ \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n} C_n^n \left[F^n a + (-1)^{n-1} F^n z\right] \Big\} + \int_a^z \frac{(z-t)^n (a-t)^n}{1.2.3\ldots 2n} F^{2n+1} t\, dt.$$

Dans le cas où Fz est une fonction réelle, ainsi que ses dérivées et la variable, on peut mettre le reste sous une autre forme. Le produit $(z-t)(t-a)$ a pour valeur maxima $\frac{1}{4}(z-a)^2$; $(z-t)^n (t-a)^n$ a pour valeur maxima $\frac{1}{2^{2n}}(z-a)^{2n}$; par suite, on a

$$r = \int_a^z \frac{(z-t)^n (a-t)^n}{1.2\ldots 2n} F^{2n+1} t\, dt = (-1)^n \frac{\theta (z-a)^{2n+1}}{1.2\ldots 2n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} F^{2n+1} z_1,$$

θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1 et z_1 une valeur intermédiaire entre a et z.

6. *Historique.* La formule précédente est due à M. Darboux, qui l'a établie par une méthode différente de celle que nous

venons d'exposer (*Journal de Liouville*, septembre 1876, 3e sér., t. II, pp. 296-297). Il a mis le reste sous les formes suivantes, faciles à déduire de celle qui est donnée plus haut (au moyen du principe général qui porte son nom) :

$$r = (-1)^n \frac{(z-a)^{2n+1}}{1.2.3..2n} \int_0^1 u^n (1-u)^n \mathrm{F}^{2n+1} [a + u(z-a)]\, du$$

$$= (-1)^n \frac{\lambda (z-a)^{2n+1}}{2n+1} \frac{\mathrm{F}^{2n+1} [a + \theta u (z-a)]}{[(n+1)\ldots 2n]^2}.$$

Il a fait observer que la formule nouvelle permet d'obtenir une approximation d'ordre $2n+1$, par le calcul de n dérivées seulement.

Une remarque analogue a été faite par M. Ch. Lagrange, qui a retrouvé la formule de M. Darboux (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. IX, pp. 114-117, mai 1885). M. Lagrange établit la formule en appliquant le théorème de Taylor à l'expression

$$r = \mathrm{F}z - \mathrm{F}a - \frac{1}{\mathrm{C}_{2n}^n} \left[(z-a) \mathrm{C}_{2n-1}^n (\mathrm{F}'a + \mathrm{F}'z) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n} (\mathrm{F}^n a \pm \mathrm{F}^n z) \right].$$

Nous avons publié l'esquisse de la démonstration contenue dans la présente Note, dans le volume suivant du même recueil (décembre 1885, pp. 848-849). Les équations qui servent à trouver les quantités p ont été résolues d'une manière très élégante dans *Mathesis* (1887, t. VII, pp. 177-178) par M. E. Cesaro.



MÉMOIRE

SUR LA

RECHERCHE LA PLUS GÉNÉRALE

D'UN

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

PAR

M. le Vte de SALVERT
Professeur à l'Université catholique de Lille.

PREMIÈRE PARTIE (*)

PRÉLIMINAIRES ET CAS PARTICULIERS REMARQUABLES.

CHAPITRE Ier.

Propriété caractéristique des invariants différentiels Δ_1 et Δ_2. Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées quelconques.

Expression des paramètres différentiels d'une fonction de point quelconque en coordonnées curvilignes. Étant donnée une *fonction de point* (**) quelconque ω, ses deux paramètres différentiels $\Delta_1\omega$ et $\Delta_2\omega$, qui sont évidemment deux nouvelles fonctions de point, sont susceptibles l'un et l'autre d'une expression simple en fonction des trois paramètres du premier ordre $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, relatifs aux trois surfaces coordonnées et de leurs

---

(*) Ce Mémoire doit être précédé d'une Introduction qui sera inséré dans l'un des volumes suivants de ces *Annales* avec la continuation du même travail.

(**) Locution très commode, empruntée à Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § I), et assez clair par elle-même pour pouvoir se passer de définition.

dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes, expressions qui sont complètement indépendantes du système particulier de coordonnées avec lequel on les suppose calculées, et qui demeurent par conséquent les mêmes quel que soit le système de coordonnées employé. Ces expressions formant le point de départ obligé de la recherche que nous allons entreprendre, c'est par les établir que nous devons commencer notre étude.

Pour le paramètre du premier ordre $\Delta_1\omega$, il nous suffira de rappeler les six égalités suivantes (*) :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\omega}{x}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{x}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{x}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{x}, &\qquad &\frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x}+\frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y}+\frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z}=0,\\ &\frac{\omega}{y}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{y}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{y}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{y}, &\qquad &\frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x}+\frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y}+\frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z}=0,\\ &\frac{\omega}{z}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{z}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{z}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{z}, &\qquad &\frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x}+\frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y}+\frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z}=0, \end{aligned}\right.$$

(dont les trois de gauche résultent immédiatement de la règle de dérivation des fonctions composées, et les trois de droite expriment l'orthogonalité des trois surfaces coordonnées) et d'ajouter membre à membre, après les avoir élevées au carré, les trois équations du premier groupe, en ayant égard en même temps aux trois équations de l'autre groupe. Il est clair que nous obtiendrons de cette façon la formule :

$$(2)\qquad \Delta_1^2\omega=\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{\omega}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2.$$

Pour obtenir semblablement l'expression du paramètre du second ordre $\Delta_2\omega$, nous commencerons par rechercher l'expression de ce paramètre en particulier pour les trois surfaces

(*) Nous faisons usage de nouveau dans ce travail, pour les dérivées partielles, de la notation abréviative, simple et commode, dont nous avons déjà montré l'avantage dans nos trois précédents Mémoires, et qui consiste à supprimer haut et bas la caractéristique *d*, en conservant seulement les exposants dont elle est affectée. Voir pour plus de détails : *Mémoire sur la théorie de la Courbure des surfaces*, pp. 2-3, ou *Mémoire sur les Ombilics coniques*, pp. 3-5, ou encore *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées curvilignes*, etc., pp. 2-3 (en note).

coordonnées, c'est-à-dire l'expression des trois fonctions $\Delta_2\varphi$, $\Delta_2\psi$, $\Delta_2\varpi$.

A cet effet, nous rappellerons de même trois autres formules que nous avons établies dans notre *Mémoire sur la théorie de la Courbure des surfaces,* savoir : en premier lieu, celle qui fait connaître la somme des deux courbures principales $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ en un point quelconque d'une surface donnée (quantité que nous désignions par la lettre H dans ce précédent travail), c'est-à-dire la formule suivante (voir § II, équation (26), page 22, *au bas*) :

$$(3) \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\Delta_2\varphi - \left(\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x} + \mu\frac{\Delta_1\varphi}{y} + \nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right];$$

en second lieu, l'expression des deux courbures principales d'une surface appartenant à un système triple orthogonal (formules (59), § III, page 70, *au bas*), savoir :

$$(4) \qquad \frac{1}{R_1} = -\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}, \qquad \frac{1}{R_2} = -\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi};$$

et enfin celle qui donne l'expression des dérivées d'une fonction de point quelconque ω par rapport à l'une des coordonnées curvilignes (formules (58), § III, même page), et qui s'obtient d'ailleurs successivement pour les trois variables φ, ψ, ϖ, par une combinaison facile des six équations ci-dessus (1), savoir pour la coordonnée φ en particulier :

$$\lambda\frac{\omega}{x} + \mu\frac{\omega}{y} + \nu\frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\varphi}\Delta_1\varphi$$

(λ, μ, ν désignant, comme dans la formule ci-dessus (3), les cosinus directeurs de la normale à la surface correspondante).

Cela posé, ayant remarqué qu'en vertu de cette dernière formule, la valeur (3) de H peut s'écrire

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\Delta_2\varphi - \frac{\Delta_1\varphi}{\varphi}\Delta_1\varphi\right] = \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} - \Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi},$$

et d'autre part qu'en ajoutant membre à membre les deux formules (4) nous obtiendrons pour la même quantité H cette autre expression

$$(5)\qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\Delta_1\varphi\left(\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi} + \frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\right) = -\Delta_1\varphi\,\frac{l.\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}{\varphi},$$

il est clair que la comparaison de ces deux valeurs de H nous fournira immédiatement la relation

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} - \Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} = -\Delta_1\varphi\,\frac{l.\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}{\varphi},$$

d'où

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} = \Delta_1\varphi\left(\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} - \frac{l.\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}{\varphi}\right) = \Delta_1\varphi\,\frac{l\left(\dfrac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)}{\varphi},$$

et enfin, en multipliant par $\Delta_1\varphi$,

$$\Delta_2\varphi = \Delta_1^2\varphi\,\frac{dl}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right) = \frac{\Delta_1^2\varphi}{\left(\dfrac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)$$

$$= \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right).$$

En opérant ainsi successivement pour les trois surfaces, nous aurons donc tout d'abord les trois expressions demandées, qui se déduiront les unes des autres par la permutation circulaire des trois variables φ, ψ, ϖ :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_2\varphi &= \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right),\\ \Delta_2\psi &= \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\right),\\ \Delta_2\varpi &= \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right). \end{aligned}\right.$$

Ce résultat étant acquis pour les trois surfaces coordonnées, il est maintenant facile de calculer le même paramètre du second

ordre pour une fonction de point quelconque ω. Il suffira évidemment pour cela de différentier à nouveau, respectivement par rapport à x, y, z, les trois égalités de gauche (1), et de les ajouter, en ayant égard aux trois autres de droite et aux trois dernières expressions que nous venons d'obtenir.

Pour faire ce calcul commodément, désignons par u l'une quelconque des trois coordonnées rectilignes x, y, z ; alors l'une quelconque des trois équations de gauche (1), qui est avec cette notation

$$\frac{\omega}{u}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}, \tag{7}$$

étant différentiée de nouveau par rapport à u, donnera l'équation

$$\frac{\omega^2}{u^2}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi^2}{u^2}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi^2}{u^2}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi^2}{u^2}+\frac{\varphi}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)+\frac{\psi}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\psi}\right)+\frac{\varpi}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varpi}\right), \tag{8}$$

dans laquelle les dérivées $\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)$, $\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\psi}\right)$, $\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varpi}\right)$, pourront être facilement calculées à l'aide de la même équation (7), en y écrivant simplement à la place de ω, d'abord $\frac{\omega}{\varphi}$, puis $\frac{\omega}{\psi}$, puis enfin $\frac{\omega}{\varpi}$: opération qui, si l'on a recours pour en écrire le résultat à la notation symbolique dont nous avons fait usage dans notre *Mémoire sur les Ombilics coniques* (*) (Introduction, page 5), nous fournira immédiatement les trois expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)&=\frac{\omega}{\varphi}\left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right),\\
\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\psi}\right)&=\frac{\omega}{\psi}\left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right),\\
\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varpi}\right)&=\frac{\omega}{\varpi}\left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right).
\end{aligned}\right.$$

(*) Pour le Lecteur qui n'aurait pas ce travail à sa disposition, nous rappellerons que la double parenthèse, affectant le facteur d'un produit ou d'une puissance, signifie pour nous que le calcul en étant d'abord effectué, comme s'il s'agissait de quantités ordinaires, le résultat devra être interprété après coup, avec l'acception différentielle dont nous sommes convenus.



En reportant donc ces valeurs dans l'expression (8), il est facile de voir que cette expression deviendra sous forme symbolique

$$\frac{\omega^2}{u^2} = \frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\psi}\frac{\psi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi^2}{u^2} + \left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u} + \frac{\omega}{\varphi}\frac{\psi}{u} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right)^2,$$

étant entendu que l'interprétation symbolique de la double parenthèse ne doit s'appliquer qu'aux dérivées de ω par rapport aux coordonnées curvilignes (et non aux dérivées de φ, ψ, ϖ), c'est-à-dire en réalité

$$\frac{\omega^2}{u^2} = \frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\psi}\frac{\psi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi^2}{u^2}$$
$$+ \frac{\omega^2}{\varphi^2}\left(\frac{\varphi}{u}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\psi^2}\left(\frac{\psi}{u}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\varpi^2}\left(\frac{\varpi}{u}\right)^2 + 2\frac{\omega^2}{\psi\varpi}\frac{\psi}{u}\frac{\varpi}{u} + 2\frac{\omega^2}{\varpi\varphi}\frac{\varpi}{u}\frac{\varphi}{u} + 2\frac{\omega^2}{\varphi\psi}\frac{\varphi}{u}\frac{\psi}{u}.$$

Si maintenant nous supposons que nous ayons récrit cette dernière équation trois fois, en prenant pour u successivement les trois coordonnées x, y, z, et que nous ayons ajouté membre à membre les trois égalités ainsi obtenues, en ayant égard en même temps aux trois équations de droite (1), il est clair que nous aurons ainsi la formule

$$(9) \qquad \Delta_2\omega = \frac{\omega}{\varphi}\Delta_2\varphi + \frac{\omega}{\psi}\Delta_2\psi + \frac{\omega}{\varpi}\Delta_2\varpi + \frac{\omega^2}{\varphi^2}\Delta_1^2\varphi + \frac{\omega^2}{\psi^2}\Delta_1^2\psi + \frac{\omega^2}{\varpi^2}\Delta_1^2\varpi,$$

ou, en remettant à la place des paramètres $\Delta_2\varphi$, $\Delta_2\psi$, $\Delta_2\varpi$ leurs valeurs (6) que nous venons d'obtenir, et mettant en facteur le produit $\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi$,

$$\Delta_2\omega = \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi\left[\frac{\omega}{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right) + \frac{\omega}{\psi}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\right) + \frac{\omega}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\omega^2}{\varphi^2}\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi} + \frac{\omega^2}{\psi^2}\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi} + \frac{\omega^2}{\varpi^2}\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right].$$



c'est-à-dire définitivement, sous forme plus simple (*) :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_2\omega = \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi \Bigg[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\omega}{\varphi}\right) + \frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\omega}{\psi}\right) \\ + \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\omega}{\varpi}\right)\Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où les familles de surfaces φ, ψ, ϖ sont toutes trois isothermes, si on les suppose rapportées à leurs paramètres thermométriques (**), comme l'on aura alors par définition $\Delta_2\varphi = 0$, $\Delta_2\psi = 0$, $\Delta_2\varpi = 0$, la formule (9) montre que cette même expression se réduira dans ce cas à la forme plus simple, complètement analogue à celle (2) déjà rencontrée dans tous les cas pour le paramètre du premier ordre Δ_1,

$$\Delta_2\omega = \Delta_1^2\varphi \cdot \frac{\omega^2}{\varphi^2} + \Delta_1^2\psi \cdot \frac{\omega^2}{\psi^2} + \Delta_1^2\varpi \cdot \frac{\omega^2}{\varpi^2},$$

qui se rapproche beaucoup plus de la forme originaire relative aux coordonnées rectilignes.

Notons en passant que les formules (2) et (10) se réduisent bien, comme cela devait être pour le cas particulier des coordonnées rectilignes, aux valeurs de définition

$$\Delta_1^2\,\omega = \left(\frac{\omega}{x}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{y}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{z}\right)^2, \qquad \Delta_2\,\omega = \frac{\omega^2}{x^2} + \frac{\omega^2}{y^2} + \frac{\omega^2}{z^2},$$

attendu que si l'on fait $\varphi = x$, $\psi = y$, $\varpi = z$, on a, en vertu de ces définitions mêmes, $\Delta_1^2\varphi = 1$, $\Delta_1^2\psi = 1$, $\Delta_1^2\varpi = 1$.

L'existence des expressions (2) et (10) et la permanence de leur forme, quel que soit le système de coordonnées employé,

---

(*) La démonstration que nous venons de donner nous semble à la fois plus courte et plus facile que celle de Lamé, rapportée par M. Bertrand dans le tome I de son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* §§ 184-186 (pp. 183-187), et qui remplit presque quatre pages de cet in-4°.

(**) Pour la définition de cette expression, si l'on en ignore le sens, voir Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XXI (pp. 31-32), ou encore notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, § IV (pp. 88 *in fine* et 89).

fait prévoir immédiatement l'importance du rôle que ces paramètres différentiels devront jouer dans la Physique Mathématique (*). En effet, nous venons de leur reconnaître, relativement aux dérivées partielles de la fonction de point ω à laquelle ils se rapportent, ainsi qu'aux paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, relatifs aux trois surfaces coordonnées, et à leurs dérivées, une propriété complètement analogue à celle des fonctions que l'on nomme *Invariants* en géométrie analytique, relative aux coefficients des équations des courbes ou surfaces auxquelles elles se rapportent, analogie telle qu'on pourrait leur attribuer avec beaucoup de raison (ainsi que nous nous proposons de le faire dans tout ce travail), la dénomination d'*Invariant Différentiel*, déjà usitée dans la science, laquelle aurait l'avantage de rappeler ainsi d'une façon très expressive leur propriété caractéristique. Or, sans reconnaître aux fonctions analogues de la géométrie une propriété générale qui n'est pas encore démontrée, bien qu'on la leur attribue habituellement, et pour baser exclusivement le rapprochement que nous voulons faire ressortir sur un exemple certain emprunté à une autorité incontestée (**), nous dirons que de même que toutes les relations permanentes (c'est-à-dire indépendantes du choix des axes coordonnés), qui existeront entre diverses courbes ou surfaces du second ordre, ne pourront être exprimées analytiquement que par certaines relations entre les invariants des courbes ou des surfaces considérées, de même toute loi physique, relative aux variations d'état d'un milieu continu, supposé homogène et isotrope (***), états qu'on peut

(*) Nous tentons dans les deux aliénas qui vont suivre de donner, non pas une démonstration rigoureuse et détaillée, comme le fait Cauchy dans ses *Exercices de Physique Mathématique* (tome I, pp. 107-115), mais une simple explication sommaire et intuitive, basée sur une vue d'ensemble forcément moins précise, d'un fait analytique extrêmement remarquable que Lamé constate à plusieurs reprises, mais dont il n'indique nulle part, fût-ce par un seul mot, la raison d'être.

(**) Salmon, *Leçons d'Algèbre Supérieure* (Traduction française de Bazin), §§ 188 (p. 202) et 204 (p. 223).

(***) Nous empruntons cette locution à la théorie de la Lumière, pour désigner un corps dont toutes les propriétés, de quelque nature qu'elles soient, sont caractérisées par des coefficients qui conservent la même valeur pour toutes les directions possibles, tout autour d'un même point.



supposer représentés par une certaine fonction de point (température, dilatation, réactions moléculaires, etc....), étant par sa nature essentiellement indépendante du système de coordonnées supposé employé pour l'étudier, ne pourra être dès lors qu'une certaine relation entre des *invariants différentiels* de la fonction de point considérée, c'est-à-dire des fonctions jouissant de la propriété caractéristique que nous venons de reconnaître aux deux paramètres $\Delta_1\omega$ et $\Delta_2\omega$ (*).

Si, de plus, on réfléchit que dans l'évaluation de la plupart des phénomènes physiques, et dans le calcul à cet effet des accroissements $\Delta\omega$ de la fonction de point qui caractérise chaque phénomène, on néglige en général les puissances des accroissements des coordonnées supérieures à la seconde, de manière que leur expression ne renferme plus alors que les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction ω, l'on voit ainsi que toutes les fois que l'expression de la loi physique élémentaire, relative au phénomène en question, sera linéaire par rapport au susdit accroissement $\Delta\omega$ (ce qui sera le cas le plus fréquent), l'équation aux dérivées partielles qui régira le phénomène ne pourra être dès lors qu'une relation entre des invariants différentiels linéaires du premier et du second ordre seulement, parmi lesquels l'invariant $\Delta_2\omega$, en supposant qu'il ne soit pas le seul (ce qui semble très probable) est assurément l'un des plus simples (**); et par suite il n'y a plus lieu de s'étonner

(*) La convenance de l'introduction de cette dénomination nouvelle étant ainsi amplement justifiée au point de vue théorique, une autre considération *d'ordre pratique* nous en impose en quelque sorte l'emploi dans tout le cours de ce Mémoire, à la place de celles introduites originairement par Lamé, dont nous avions fait usage jusqu'ici, vu le retour incessamment répété tout au long de cette théorie, dans nos raisonnements et nos calculs, de quantités de cette espèce, simultanément avec les paramètres φ, ψ, ϖ des trois surfaces coordonnées ou d'autres familles de surfaces; car cette coexistence nous obligerait dès lors, sous peine de créer la confusion, à adjoindre à chaque fois aux paramètres Δ_1 et Δ_2 l'épithète de différentiels, qui complique et embarrasse le discours, tandis que nous éviterons cet inconvénient en adoptant la dénomination d'*invariant* qui ne saurait au contraire donner naissance à aucune ambiguïté.

(**) Ce simple aperçu suffit à faire comprendre, comme nous le voulions, la nécessité du fait qu'il s'agissait d'expliquer, mais la conclusion des considérations développées ci-dessus est rigoureusement établie par Cauchy, lequel démontre dans l'article déjà

de la fréquence avec laquelle on le voit apparaître sans cesse dans l'expression des principales lois de la Physique Mathématique. Il nous suffira, dans ce domaine, de citer comme exemples, avec Lamé, en nous bornant aux plus simples, les quatre équations

$$(11)\quad \Delta_2 \omega = 0, \quad \Delta_2 \omega = k\frac{d\omega}{dt}, \quad \Delta_2 \omega = k^2 \frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad \Delta_2(\Delta_2 \omega) = 0,$$

qui régissent successivement le potentiel dans la théorie de l'Électricité, la température d'un milieu homogène et isotrope dans la théorie de la Chaleur (comme nous allons le montrer tout à l'heure), enfin les vibrations d'un fluide compressible, ainsi que la dilatation en un point quelconque d'un milieu isotrope, dans la théorie générale de l'Élasticité.

Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées rectilignes. — Ces préliminaires étant admis, deux procédés différents s'offrent à nous pour arriver à former l'équation aux dérivées partielles qui régit la température des divers points d'un corps, supposés rapportés à un système de coordonnées quelconques. Nous pourrons, en premier lieu, chercher à former directement cette équation dans le système des coordonnées planes ou rectilignes, avec lequel on est généralement le plus familiarisé, et en supposant que nous ayons obtenu cette équation, la transformer ensuite en coordonnées curvilignes quelconques, à l'aide des

cité par la note de la page précédente (voir *Exerc. de Phys. Math.*, tome I, p. 114, au bas, *théor.* 8), que, pour conserver à la fois une forme et une valeur indépendantes de la direction des axes coordonnés, toute fonction linéaire des dérivées de tous ordres d'une fonction ω doit nécessairement se réduire à une fonction entière (symbolique) de $\Delta_2\omega$, c'est-à-dire à une expression de la forme :

$$\sum_n A_n \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\right)^n \omega,$$

n étant entier, et A_n désignant une simple constante : proposition qui n'est que la généralisation, pour un ordre de dérivées quelconque, de la propriété que nous attribuons comme très probable au second invariant Δ_2 considéré par Lamé.

formules relatives à cette théorie, que nous avons démontrées dans le précédent travail déjà cité. Nous pourrons, en second lieu, chercher à établir immédiatement cette même équation dans le système le plus général de coordonnées orthogonales, à l'aide de raisonnements basés sur la considération directe des surfaces coordonnées qui composent ce système. Nous allons passer en revue successivement ces deux modes de traiter la question précitée (*).

La démonstration que nous proposons pour cet objet sera,

(*) Pour la formation de cette équation, qu'il s'agisse de coordonnées planes ou curvilignes (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes* (1857), § CXLVI et *sequ.* pp. 198-204); *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (1859), § XVI (pp. 25-27); *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* (1861), § XIX (pp. 27-29), Lamé ne fait que reproduire, en l'adaptant au système de coordonnées envisagé, le mode de raisonnement du créateur de la théorie mathématique du mouvement de la Chaleur, l'illustre Fourier, lequel avait résolu la question, en transportant, pour ainsi dire, sans aucun changement quant au fond, de l'Hydrodynamique dans l'étude de la température, le raisonnement à l'aide duquel Euler et Bernouilli avaient établi l'équation dite de *continuité*, qui complète, avec les trois équations fournies par le théorème de d'Alembert et l'équation de définition relative à la nature du fluide, les cinq équations nécessaires pour la détermination du mouvement de ce même fluide. Ce raisonnement, emprunté à une époque où les géomètres, tout en faisant un usage constant des infiniment petits, n'avaient pas encore cependant une idée bien nette de leur signification réelle et des conditions exactes de leur emploi, consiste, comme l'on sait, à évaluer par deux modes différents la quantité de matière en question (fluide ou chaleur) qui vient accroître, pendant un élément de temps, celle déjà contenue dans un parallélipipède infiniment petit suivant ses trois dimensions, quantité que l'on peut regarder par conséquent comme l'excès de la quantité similaire entrée dans le parallélipipède par trois faces non parallèles, sur la quantité sortie de même par les faces parallèles correspondantes. Nous n'apprendrons rien au Lecteur en rappelant que ce même raisonnement présente un vice capital, quant au mode d'emploi des infiniment petits, en ce que les trois arêtes de ce parallélipipède étant supposées essentiellement du même ordre infinitésimal, on évalue, chaque fois qu'il en est besoin, l'accroissement d'une fonction de point, considérée dans l'étendue d'une certaine face, en tenant compte de sa variation suivant la direction normale à la face, et négligeant arbitrairement ses variations suivant les directions parallèles à la même face, ce qui est complètement illégitime, du moment que les accroissements des variables correspondant à ces deux dernières directions sont entièrement comparables à celui de la variable correspondant à la première. Cette faute répétée trois fois (pour chaque couple de faces parallèles) enlève toute valeur démonstrative au raisonnement et impose l'obligation absolue, tout au moins pour l'Enseignement, de reprendre à nouveau la question et de la traiter cette fois conformément aux principes rigoureux sur lesquels repose, dans la Science actuelle, la méthode infinitésimale, principes aussi clairs, aussi précis, et aussi inflexibles, depuis Cauchy et Duhamel, que n'importe quelle proposition de la géométrie d'Euclide

dans un cas comme dans l'autre, basée tout entière sur un Lemme ou proposition préliminaire que beaucoup de bons esprits seront tentés sans doute d'admettre comme évident, mais qu'en vue d'une complète rigueur nous voulons commencer par mettre à l'abri de toute contestation.

LEMME. « V *étant supposé désigner une fonction déterminée de*
» *trois coordonnées quelconques* x, y, z, *si l'intégrale* $\iiint$ V dxdydz
» *reste constamment nulle, quel que soit le volume à l'intérieur*
» *duquel on calcule cette intégrale, la fonction* V *est nécessaire-*
» *ment identiquement nulle.* »

En effet, imaginons tout d'abord que x, y, z, désignent des coordonnées rectilignes, et supposons qu'une certaine fonction V remplisse la condition que nous venons de dire. Considérons une portion déterminée de l'espace, arbitrairement choisie d'ailleurs, que nous désignerons par (S). Ce volume se composera exclusivement, dans l'hypothèse la plus générale : 1° de portions pour lesquelles la fonction V est positive, dont l'ensemble, continu ou discontinu, forme une portion nettement délimitée de l'espace, que nous représenterons par (S'); 2° d'autres portions pour lesquelles la fonction V est négative, et dont l'ensemble constitue un autre volume déterminé de forme et de position que nous appellerons (S''); 3° enfin d'autres portions, pour lesquelles cette même fonction est nulle, et dont nous désignerons l'ensemble par (S'''), définitions que l'on pourra symboliser pour plus de netteté par l'égalité : (S) = (S') + (S'') + (S''').

Considérons d'abord la première portion (S') seulement. Par hypothèse l'intégrale $\iiint V dxdydz$, effectuée à l'intérieur de ce volume en particulier, est nulle d'une part, l'élément de l'intégrale restant constamment positif d'autre part, ce qui implique contradiction. La portion (S') n'existe donc pas dans le volume (S). On verrait exactement de la même façon que ce volume ne saurait renfermer de portion (S''), et par conséquent il se réduit exclusivement à la portion (S'''), c'est-à-dire que de quelque façon qu'ait été choisi ce volume (S), la fonction V est néces-

sairement nulle en tous ses points, ce qui justifie la proposition énoncée (*).

Cette proposition étant établie dans l'hypothèse où x, y, z représentent trois coordonnées rectilignes, subsistera nécessairement lorsque l'on supposera que ces mêmes variables représentent trois coordonnées quelconques; car si l'on désigne alors par x', y', z', trois coordonnées rectilignes, l'intégrale proposée pourra, en changeant de variables, être ramenée à la forme $\iiint V\Theta\, dx'\, dy'\, dz'$, Θ désignant le déterminant fonctionnel des anciennes coordonnées x, y, z, par rapport aux nouvelles x', y', z', lequel ne pourra être nul quels que soient x', y', z', puisque les trois coordonnées x, y, z sont des variables essentiellement indépendantes entre elles. Dès lors, le produit $V\Theta$ étant identiquement nul, en vertu de la proposition démontrée pour les coordonnées rectilignes, il faudra nécessairement qu'il en soit de même encore de la fonction V.

Rappelons maintenant en quelques mots la loi physique de la propagation de la chaleur par conductibilité, qui sert de point

---

(*) Il est clair, d'après les termes mêmes de notre énoncé, que l'existence de ce Lemme et par suite son application sont subordonnées à cette condition que le symbole $\iiint V\, dx dy dz$ puisse être considéré *a priori* comme ayant une signification (selon les termes de la définition habituelle) dans toute l'étendue d'un volume déterminé (S) ou, ce qui revient au même, que la fonction V puisse être considérée comme continue dans toute l'étendue de ce même volume. Mais cette condition qui, dans le champ général de l'Analyse pure, constituerait une restriction notable, n'en n'est pas une à proprement parler sur le terrain limité de la Physique Mathématique, en vue duquel nous formulons cette proposition et auquel nous entendons borner son application, et cela pour une double raison : au fond, parce que toutes les fonctions telles que V que l'on y considère sont supposées précisément *a priori* remplir la condition exigée. (Voir LAMÉ, *Leçons sur la Théorie analytique de la Chaleur*, §§ XII et XIV, pp. 17 et 19); et, en fait, parce que chacune des intégrales triples envisagées représentera le plus souvent une quantité concrète d'une nature déterminée (masse, moment d'inertie, force vive, potentiel, quantité de chaleur, etc.) directement mesurable par l'expérience (au moins en théorie), et offrira par conséquent une signification précise, à savoir la grandeur de la quantité représentée.

Ayant ainsi nettement circonscrit le terrain que nous attribuons à l'avance à la portée et à l'usage certain de ce Lemme, nous pensons qu'il n'y a pas lieu dès lors de se préoccuper des divers cas d'exception pour lesquels il pourrait se trouver en défaut dans le domaine de l'Analyse pure, en raison de l'absence de continuité de la fonction V, ou de tout autre motif de quelque genre que ce soit.

de départ à cette théorie, et que l'on trouve dans quelques auteurs désignée sous le nom de *Loi du Mur*. Pour plus de précision dans les calculs qui vont suivre, nous la formulerons explicitement de la façon suivante :

LOI DE LA CONDUCTIBILITÉ. « *Étant donné un mur indéfini, ou » milieu homogène à faces parallèles, d'épaisseur* E, *séparant » dans l'espace deux portions que nous distinguerons par les » indices 1 et 2, si l'on suppose ses deux faces entretenues aux » deux températures constantes* θ_1 *et* θ_2, *la quantité ou* flux de » chaleur *q, qui traversera dans le temps* T *une aire* Ω *de ce » mur, en passant de la face chaude à la face froide, aura pour » expression*

$$(12) \qquad q = \frac{Q\Omega}{E}(\theta_1 - \theta_2)\,T \qquad \text{ou} \qquad q = \frac{Q\Omega}{E}(\theta_2 - \theta_1)\,T,$$

» *suivant que l'on supposera* $\theta_1 > \theta_2$ *ou* $\theta_2 > \theta_1$, Q *étant un coeffi- » cient constant qui a reçu le nom de* conductibilité (*), *et dont » la signification physique résulte de cette formule elle-même, » par le fait qu'il représente la valeur particulière de la quantité »* q, *lorsque l'on y suppose toutes les autres données égales à » l'unité.* »

Au lieu d'avoir ainsi à tenir compte de deux formules différentes suivant le cas, si l'on convient, pour plus de simplicité, d'attribuer un signe à ce flux de chaleur, on pourra dans tous les cas ne garder que la première seulement de ces deux expressions qui ne diffèrent que par le signe, étant entendu alors que le signe de cette expression spécifiera le *sens* du flux, c'est-à-dire que le mouvement de la chaleur aura lieu de la face 1 vers

(*) Notre but, dans ce premier chapitre de notre travail, n'étant nullement en réalité l'exposition, selon la Science actuelle, d'une théorie de Physique Mathématique, mais simplement l'établissement de l'équation dite de l'*Équilibre de température*, sur laquelle repose expressément la définition des *familles isothermes de surfaces*, nous laissons de côté le cas général de la Nature, à savoir celui de la conductibilité variable avec la direction autour d'un même point, pour nous restreindre à l'hypothèse d'un corps *isotrope* ou de la conductibilité constante qui seule donne naissance à la forme caractéristique de l'équation précitée.

la face 2, ou en sens contraire, suivant que cette première expression sera positive ou négative. — Telle est la convention expresse que nous adopterons pour tout le calcul qui va suivre.

La loi que nous venons de rappeler étant établie par l'expérience pour des quantités finies quelconques, s'appliquera encore par conséquent à des quantités infiniment petites quelconques, et pourra dès lors fournir l'expression de la quantité de chaleur qui traverse, dans un élément de temps dt, un élément infiniment petit quelconque ω d'une couche infiniment mince, isolée arbitrairement par la pensée au sein d'un corps ou milieu homogène, supposé soumis à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur. En effet, la couche en question étant imaginée comme comprise entre deux surfaces infiniment voisines d'une même famille, si δN représente l'élément de normale, correspondant à l'élément de surface ω, compris entre ces deux surfaces, ou, ce qui est la même chose, l'épaisseur de la couche en ce point, θ la fonction de x, y, z, qui représente la température en un point quelconque du milieu, et $\delta\theta$ l'accroissement que reçoit cette fonction en s'avançant sur la normale de l'élément δN, la couche envisagée se confondant dans l'étendue de l'élément d'aire ω avec un mur de même épaisseur δN, compris entre les plans tangents aux deux surfaces, la première formule (12) nous donnera pour l'expression de la quantité de chaleur en question

$$(13) \qquad q = \frac{Q\omega}{\delta N}[\theta - (\theta + \delta\theta)]\, dt = - Q\omega \frac{\delta\theta}{\delta N}\, dt;$$

et d'après nos conventions ci-dessus, suivant que cette dernière expression affectera une valeur positive ou négative, le mouvement de la chaleur aura lieu de la première surface vers la seconde, c'est-à-dire dans le sens où est compté l'élément de normale δN, ou en sens contraire; ce qui revient encore à dire, si l'on convient expressément de compter cet élément suivant la normale *intérieure*, que les valeurs positives correspondront aux flux de chaleur qui rentreront dans la surface, et les valeurs négatives à ceux qui en sortiront.



Ces préliminaires établis, l'esprit de notre démonstration consistera à évaluer par deux modes différents la quantité totale dont s'accroît, dans un élément de temps dt, la quantité de chaleur déjà existante à l'intérieur d'un volume fixe, arbitrairement choisi au sein du milieu homogène proposé, supposé soumis à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur. Si l'on désigne par ρ la densité du milieu, par c son calorifique spécifique sous volume constant, l'élément de masse $dm = \rho\, dxdydz$ acquérant dans le temps dt une quantité de chaleur (positive ou négative) $cgdm \frac{d\theta}{dt} dt$, il est clair que la quantité totale de chaleur, gagnée dans le même temps par la masse tout entière renfermée dans le volume considéré, aura pour première expression

$$(14) \qquad \mathbf{S}\, cgdm \frac{d9}{dt} dt = \iiint cg\rho dxdydz \frac{d\theta}{dt} dt,$$

la sommation $\mathbf{S}$ représentant, pour abréger l'écriture, l'intégrale triple étendue à tout le volume considéré.

D'autre part, chaque élément ω de la surface qui limite le volume considéré étant traversé par un flux de chaleur exprimé par la formule (13), dans le sens de l'élément de normale intérieure δN, ou en sens contraire, suivant que cette expression sera positive ou négative, il est clair que la somme algébrique $\Sigma \left(- Q\omega \frac{\delta\theta}{\delta N} dt\right)$ de tous ces différents flux, correspondant à tous les éléments ω de cette surface, représentera bien l'excès de la somme des flux entrés dans la surface, ou des gains de chaleur, sur celle des flux sortis pendant le même temps, ou des pertes simultanées, c'est-à-dire en définitive la quantité totale de chaleur gagnée, pendant ce temps dt, par la masse renfermée à l'intérieur du volume considéré. Si donc nous désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale *intérieure* de cette surface correspondant à l'élément ω, ayant par définition à la fois

$$\delta\theta = \frac{\theta}{x}\delta x + \frac{\theta}{y}\delta y + \frac{\theta}{z}\delta z,$$

et

$$\delta x = \delta N \cos\alpha, \qquad \delta y = \delta N \cos 6, \qquad \delta z = \delta N \cos\gamma,$$

d'où, par suite,

$$(15)\qquad \frac{\delta\theta}{\delta N} = \frac{\theta}{x}\cos\alpha + \frac{\theta}{y}\cos 6 + \frac{\theta}{z}\cos\gamma;$$

cette seconde expression de la quantité de chaleur considérée pourra se mettre sous la forme

$$(16)\qquad -\sum Q\omega\frac{\delta\theta}{\delta N}dt = -\sum Q\omega\left(\frac{\theta}{x}\cos\alpha + \frac{\theta}{y}\cos 6 + \frac{\theta}{z}\cos\gamma\right)dt,$$

la sommation $\sum$ s'étendant à tous les éléments ω de la surface envisagée, et c'est en égalant cette seconde expression (16) à la première (14), que nous obtiendrons précisément l'équation demandée.

A cet effet, nous commencerons par mettre cette seconde expression, ainsi que l'est déjà la première, sous la forme d'une intégrale triple étendue à tout le volume en question, à l'aide d'un procédé de transformation, très fréquemment usité depuis le célèbre Mémoire de George Green sur la Théorie mathématique de l'Électricité (*).

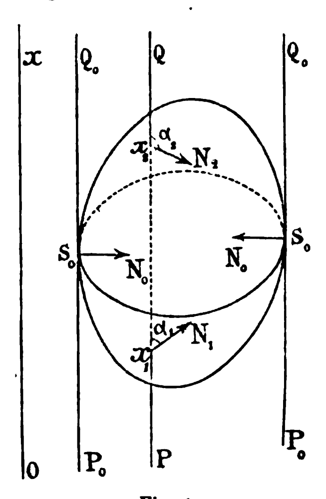


Fig. 1.

Dans ce but, ayant décomposé la somme (16) en trois sommes partielles, correspondant à chacun des termes de la parenthèse, pour évaluer le premier de ces termes, à savoir $-\Sigma Q\omega\frac{\theta}{x}\cos\alpha\, dt$, nous envisagerons séparément les deux portions de la surface séparées par la courbe de contour apparent S_0S_0 relative au cylindre projetant sur le plan yz, cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x; et nous désignerons respectivement par ω_1, α_1, 6_1, γ_1

(*) *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Nottingham, 1828); ou bien *Journal de Crelle*, t. XXXIX, p. 73, et t. XLIV, p. 356.

et ω_2, α_2, β_2, γ_2, les valeurs de ω, α, β, γ, correspondant à deux éléments de surface, empruntés successivement à l'une et à l'autre de ces deux portions, et situés de plus par hypothèse sur une même parallèle PQ à l'axe des x. La forme et l'étendue de chacun de ces éléments étant d'ailleurs entièrement arbitraires, on peut imaginer d'une part que ces deux éléments se recouvrent exactement en projection sur le plan des yz, et d'autre part que cette projection commune soit précisément le rectangle infinitésimal $dydz$, de telle sorte que l'on aura alors en grandeur et en signe

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1 \cos\alpha_1 = dydz, \qquad \text{et} \qquad \omega_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = dydz, \\ \text{ou} \\ \omega_2 \cos\alpha_2 = -\,dydz, \end{array}\right.$$

car la courbe de contour apparent, tout le long de laquelle l'angle α est droit, sépare évidemment les deux parties de la surface dans lesquelles le même angle α est aigu pour l'une et obtus pour l'autre (*). Par conséquent, en désignant de même par Σ_1 et Σ_2 deux sommations relatives à chacune des deux portions de la surface, le terme que nous nous proposons de calculer pourra s'écrire successivement

$$\begin{aligned} -\sum Q\omega\frac{\theta}{x}\cos\alpha\, dt &= -\,Qdt\left[\sum\nolimits_1 \left(\frac{\theta}{x}\right)_1 \omega_1\cos\alpha_1 + \sum\nolimits_2 \left(\frac{\theta}{x}\right)_2 \omega_2\cos\alpha_2\right] \\ &= -\,Qdt\left[\sum\nolimits_1 \left(\frac{\theta}{x}\right)_1 dydz - \sum\nolimits_2 \left(\frac{\theta}{x}\right)_2 dydz\right] \\ &= Qdt\left[\sum\nolimits_2 \left(\frac{\theta}{x}\right)_2 dydz - \sum\nolimits_1 \left(\frac{\theta}{x}\right)_1 dydz\right] \end{aligned}$$

(*) Les termes de ce raisonnement, pris au pied de la lettre, supposent, pour plus de simplicité, que chaque parallèle à l'axe des x ne perce la surface fermée du volume considéré qu'en deux points seulement; mais le nombre de ces points étant toujours nécessairement pair (sauf dans le cas où deux d'entre eux viennent à se confondre en un seul, c'est-à-dire lorsque cette même droite rencontre le contour apparent), on reconnaît de suite que ces mêmes raisonnements subsistent isolément pour chaque couple des deux points d'entrée et de sortie de la droite par rapport au volume en question. Voir, au reste, pour plus de détails, si l'on en désire, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. II, § 200, p. 202.

Dès lors, sous cette forme, les deux dernières sommes partielles Σ_1 et Σ_2 étant relatives toutes deux au même élément *dydz*, et s'étendant à la même portion du plan *yz*, à savoir l'aire renfermée à l'intérieur du cylindre projetant circonscrit à la surface ou de la projection du contour apparent sur ce plan, pourront évidemment être remplacées l'une et l'autre par une intégrale double étendue à la même aire, intégrales dont la différence équivaudra elle-même à une intégrale triple étendue à tout le volume considéré, transformations que l'on peut indiquer alors par les égalités suivantes :

$$-\sum Q\omega\frac{\theta}{x}\cos\alpha\,dt = Qdt\iint\left[\left(\frac{\theta}{x}\right)_2-\left(\frac{\theta}{x}\right)_1\right]dydz$$
$$= Qdt\iiint\frac{\theta^2}{x^2}\,dxdydz.$$

On trouverait exactement de même, en considérant successivement le cylindre projetant sur le plan des *zx*, puis sur celui des *xy*,

$$-\sum Q\omega\frac{\theta}{y}\cos 6\,dt = Qdt\iiint\frac{\theta^2}{y^2}\,dxdydz,$$
$$-\sum Q\omega\frac{\theta}{z}\cos\gamma\,dt = Qdt\iiint\frac{\theta^2}{z^2}\,dxdydz,$$

l'intégrale triple étant toujours étendue à tout le volume considéré; de telle sorte qu'en ajoutant membre à membre ces trois dernières égalités, nous aurons, en définitive, pour expression de la somme (16)

$$-\sum Q\omega\frac{\delta\theta}{\delta N}\,dt = -\sum Q\omega\left(\frac{\theta}{x}\cos\alpha+\frac{\theta}{y}\cos 6+\frac{\theta}{z}\cos\gamma\right)dt$$
$$= Qdt\iiint\left(\frac{\theta^2}{x^2}+\frac{\theta^2}{y^2}+\frac{\theta^2}{z^2}\right)dxdydz = \iiint Q\Delta_2\theta\,dxdydzdt.$$

Égalant donc cette dernière expression à la première (14) de la même quantité de chaleur, nous obtiendrons l'égalité

$$\iiint cg\rho\frac{d\theta}{dt}\,dxdydzdt = \iiint Q\Delta_2\theta\,dxdydzdt,$$

ou, en nous souvenant que les deux intégrales sont prises toutes deux à l'intérieur du même volume,

$$Qdt \iiint \left(\Delta_2 \theta - \frac{cg\rho}{Q} \frac{d\theta}{dt} \right) dx dy dz = 0.$$

Cette intégrale devant ainsi être nulle, quel que soit le volume arbitrairement choisi auquel on l'étend, il s'ensuit, d'après le Lemme démontré en commençant, que la fonction entre parenthèses sera identiquement nulle, lorsque l'on y supposera remise à la place de θ la fonction de x, y et z, qui représente la température en chaque point du corps, c'est-à-dire, en d'autres termes, que cette même fonction θ vérifiera l'équation aux dérivées partielles

$$(17) \qquad \Delta_2 \theta - k \frac{d\theta}{dt} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 \theta = k \frac{d\theta}{dt},$$

en convenant de désigner par k le rapport constant $k = \frac{cg\rho}{Q}$.

Telle est donc l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui régit la température dans un milieu homogène et isotrope. Il reste bien encore, à la vérité, pour que le problème soit complètement défini, à montrer par quel genre de considérations seront déterminées, dans chaque cas particulier, les deux fonctions arbitraires qui entreront nécessairement dans l'intégrale générale de cette équation du second ordre linéaire et à coefficients constants; mais ce dernier point étant en réalité sans intérêt pour la théorie analytique que nous avons en vue comme but principal de ce travail, savoir, la recherche générale des familles isothermes de surfaces, susceptibles de faire partie d'un système triple orthogonal, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter dans le corps proprement dit de ce Mémoire (*).

(*) Pour le cas néanmoins où le Lecteur estimerait (non sans quelque raison) que dans l'Enseignement une question, quelle qu'elle soit, ne doit être abordée qu'à la condition d'être ensuite traitée complètement, voici les données sur lesquelles repose la définition xacte du problème actuel. analogues, par suite, à celles des coordonnées et des vitesses ales pour les problèmes de Mécanique.



Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées curvilignes. — Revenons maintenant à la question générale que nous nous étions posée, à savoir la recherche de l'équation du même problème dans un système de coordonnées quelconques.

Une première voie, avons-nous dit, s'offre à nous pour y arriver, qui consistera à profiter simplement, en les rapprochant, des résultats établis dans les deux paragraphes précédents. En effet, l'équation générale demandée étant l'équation (17) dans le système particulier des coordonnées planes ou rectilignes, et la formule (10) nous fournissant d'ailleurs l'expression du second invariant différentiel $\Delta_2\theta$ dans un système de coordonnées curvilignes quelconques, il s'ensuit immédiatement, en comparant

---

Les fonctions arbitraires, introduites par l'intégration de cette équation linéaire, seront déterminées par deux ordres de considérations distinctes :

1° Par celle de l'*état initial* du corps, c'est-à-dire par la condition que la fonction θ se réduise, pour $t=0$, à une fonction donnée arbitrairement $\theta_0 = f(x, y, z)$, qui représentera la température en un point quelconque du corps, à un instant particulier pris pour origine du temps ;

2° Par la considération des *conditions aux limites* qui, contrairement à la précédente, doivent être satisfaites à tout instant pour certains points particuliers seulement, à savoir ceux de la surface qui limite le corps, et qui sont imposées, soit exclusivement, pour la totalité de cette surface, par l'une ou l'autre des deux considérations suivantes, soit simultanément, pour parties de cette surface, par l'une ou l'autre de ces considérations, savoir :

a) Par l'obligation d'une température déterminée et invariable avec le temps, en chaque point de la surface totale ou partielle du corps, si on le suppose plongé en tout ou en partie dans un milieu dont on puisse regarder la masse comme infinie par rapport à la sienne, milieu qui, dès lors, imposera au corps sa température propre, en chacun des points de son contact avec lui. Dans ce cas, si $F(x, y, z) = 0$ représente la surface qui limite le corps, la fonction cherchée θ sera astreinte à affecter, quel que soit t, pour toutes les valeurs de x, y et z, qui vérifient cette équation, les mêmes valeurs, que la fonction arbitrairement donnée $\Theta(x, y, z)$, qui exprimera la température fixe du milieu dans lequel on suppose le corps plongé en chacun des points de contact de leurs deux surfaces ;

b) Par la loi physique du Rayonnement, si l'on suppose, au contraire, le corps isolé sur tout ou partie de sa surface, et rayonnant dès lors, soit dans l'espace infini, soit dans une enceinte à température constante et uniforme. Dans cette seconde hypothèse, la loi connue du Rayonnement exigera que le flux de chaleur, qui traverse dans le temps dt un élément de la surface du corps, soit égal à ωdt, multiplié par une nouvelle constante e, appelée *Pouvoir émissif*, et par l'excès de la température du corps relative à cet élément sur la température constante du vide ou de l'enceinte ; c'est-à-dire, par conséquent, si l'on convient de prendre pour zéro cette température fixe et uniforme de l'enceinte, que ce flux de chaleur sera exprimé par le produit $e\theta\omega dt$. L'expression de ce même flux étant d'ailleurs également fournie par la formule générale (13, dans laquelle le rapport ou

ces deux formules, et divisant alors les deux membres de l'équation ainsi obtenue par le produit $\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi\,\Delta_1\varpi$, que l'équation cherchée sera dans le système le plus général de coordonnées orthogonales

$$(18)\qquad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\,\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\,\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)=\frac{k}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{d\theta}{dt},$$

équation aux dérivées partielles, encore linéaire et du second ordre, mais non plus à coefficients constants comme dans le cas des coordonnées rectilignes, et dont l'intégration introduira semblablement dans l'expression de θ certaines fonctions arbitraires, que l'on déterminera par les mêmes considérations que

---

dérivée géométrique $\frac{\partial\theta}{\partial N}$ a la valeur (15) (sauf qu'il faut entendre alors que α, β, γ sont relatifs à la normale *extérieure*), on devra donc avoir ainsi, pour tous les points de la surface du corps, la condition

$$-\,Q\omega\left(\frac{\theta}{x}\cos\alpha+\frac{\theta}{y}\cos\beta+\frac{\theta}{z}\cos\gamma\right)dt=e\,\theta\,\omega\,dt,$$

ou, en divisant par $Q\omega\theta dt$, et désignant par K le rapport constant $K=\frac{e}{Q}$,

$$\frac{\partial\theta}{x}\cos\alpha+\frac{\partial\theta}{y}\cos\beta+\frac{\partial\theta}{z}\cos\gamma+K=0.$$

Dans cette nouvelle hypothèse il faudra donc que pour tous les points de la surface du corps $F(x,y,z)=0$ seulement, pour lesquels on aura

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{F}{x},\qquad \cos\beta=\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{F}{y},\qquad \cos\gamma=\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{F}{z},$$

la fonction θ, en outre de l'équation générale du second ordre (17), satisfasse encore à l'équation *aux limites*, du premier ordre,

$$\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{\partial\theta}{x}+\frac{F}{y}\frac{\partial\theta}{y}+\frac{F}{z}\frac{\partial\theta}{z}\right)+K=0,$$

ou, ce qui est la même chose, en multipliant par $\pm\,\Delta_1 F$, puis remplaçant cette quantité par sa valeur de définition,

$$(A)\qquad \frac{F}{x}\frac{\partial\theta}{x}+\frac{F}{y}\frac{\partial\theta}{y}+\frac{F}{z}\frac{\partial\theta}{z}\pm K\left[\left(\frac{F}{x}\right)^2+\left(\frac{F}{y}\right)^2+\left(\frac{F}{z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0,$$

le signe qu'il faudra prendre devant le dernier terme pour chaque point de la surface étant celui qui convient à la normale *extérieure* en ce point.

nous avons expliquées pour le cas précédent, dans la note de la page 20 (*).

Un second mode, plus intéressant et plus fécond, de résoudre

(*) Ces considérations seront donc encore celles de l'état initial, et des conditions aux limites.

Quant au premier de ces points de vue, la fonction θ sera astreinte alors à se réduire, pour $t=0$, à la fonction arbitrairement donnée $\theta_0 = f(\varphi, \psi, \varpi)$, qui caractérisera l'état initial du corps dans le système de coordonnées envisagé; et quant au second, il faudra que pour tous les points de la surface du corps, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de φ, ψ, ϖ qui satisferont à l'équation $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi)=0$ de cette surface (la fonction $\mathcal{F}$ procédant de la fonction $F(x, y, z)$ envisagée tout à l'heure par la simple transformation des coordonnées), il faudra, disons-nous, que la fonction θ, quel que soit t, ou bien prenne la même valeur qu'une fonction arbitrairement donnée de φ, ψ, ϖ, caractérisant l'état d'un milieu ambiant, ou bien satisfasse à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre imposée par la loi du Rayonnement, c'est-à-dire à l'équation (A) de la note précédente (page 22), supposée transformée dans le système de coordonnées considéré.

Pour effectuer d'ailleurs cette transformation, il suffira d'observer que si U désigne pour un instant l'une quelconque des deux fonctions F ou $l\theta$, dont les dérivées figurent seules au premier membre de cette équation, et u l'une quelconque des trois coordonnées rectilignes, on aura évidemment

$$\frac{U}{u} = \frac{U}{\varphi}\frac{\varphi}{u} + \frac{U}{\psi}\frac{\psi}{u} + \frac{U}{\varpi}\frac{\varpi}{u},$$

en sorte que $F(x, y, z)$ et $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi)$ représentant par hypothèse la même fonction exprimée successivement dans les deux systèmes de coordonnées, l'équation en question (A), équivaudra alors à la suivante :

$$\left(\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\frac{\varphi}{x} + \frac{\mathcal{F}}{\psi}\frac{\psi}{x} + \frac{\mathcal{F}}{\varpi}\frac{\varpi}{x}\right)\left(\frac{l\theta}{\varphi}\frac{\varphi}{x} + \frac{l\theta}{\psi}\frac{\psi}{x} + \frac{l\theta}{\varpi}\frac{\varpi}{x}\right)$$
$$+\left(\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\frac{\varphi}{y} + \frac{\mathcal{F}}{\psi}\frac{\psi}{y} + \frac{\mathcal{F}}{\varpi}\frac{\varpi}{y}\right)\left(\frac{l\theta}{\varphi}\frac{\varphi}{y} + \frac{l\theta}{\psi}\frac{\psi}{y} + \frac{l\theta}{\varpi}\frac{\varpi}{y}\right)$$
$$+\left(\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\frac{\varphi}{z} + \frac{\mathcal{F}}{\psi}\frac{\psi}{z} + \frac{\mathcal{F}}{\varpi}\frac{\varpi}{z}\right)\left(\frac{l\theta}{\varphi}\frac{\varphi}{z} + \frac{l\theta}{\psi}\frac{\psi}{z} + \frac{l\theta}{\varpi}\frac{\varpi}{z}\right) \pm K\Delta_1\mathcal{F} = 0,$$

laquelle, en développant, et ayant égard simultanément aux six équations (1) et à la formule (2), se réduira simplement à

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1^2\varphi\,\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\cdot\frac{l\theta}{\varphi} + \Delta_1^2\psi\,\frac{\mathcal{F}}{\psi}\cdot\frac{l\theta}{\psi} + \Delta_1^2\varpi\,\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\cdot\frac{l\theta}{\varpi} \\ &\pm K\left[\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\right)^2 + \Delta_1^2\psi\left(\frac{\mathcal{F}}{\psi}\right)^2 + \Delta_1^2\varpi\left(\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour résoudre le problème à l'aide des équations (18) et (B) (ou de la première seule, avec la condition $\theta_0 = f(\varphi, \psi, \varpi)$, suivant les hypothèses que nous venons de distinguer),

la même question s'offre également à nous, qui consiste, celui-là, à reprendre à nouveau, immédiatement avec le système de coordonnées définitif, mais en ayant soin de les calquer en quelque sorte pour les adapter à ce système, les procédés et les raisonnements dont nous venons de faire usage pour traiter la même question, à l'aide de l'instrument classique des coordonnées rectilignes. Nous nous trouverons ainsi conduits tout naturellement à formuler la démonstration suivante.

L'élément de volume étant à présent le petit parallélipipède curviligne découpé par trois couples de surfaces infiniment voisines deux à deux, appartenant chacun à l'une des trois

---

il faudra nécessairement exprimer tout d'abord les trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ qui figurent dans ces équations à l'aide des coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ elles-mêmes, ce qui se fera, soit en résolvant les équations de définition du système coordonné, savoir

(C) $$\varphi(x, y, z = \varphi, \qquad \psi(x, y, z) = \psi, \qquad \varpi(x, y, z) = \varpi,$$

par rapport aux variables x, y, z et remettant alors les valeurs ainsi obtenues

(D) $$x = f_1(\varphi, \psi, \varpi), \qquad y = f_2(\varphi, \psi, \varpi), \qquad z = f_3(\varphi, \psi, \varpi),$$

dans les expressions résultant des précédentes (C), d'après la définition du symbole Δ_1,

$$\Delta_1^2\varphi = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2, \qquad \Delta_1^2\psi = \left(\frac{\psi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{z}\right)^2,$$

$$\Delta_1^2\varpi = \left(\frac{\varpi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varpi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varpi}{z}\right)^2,$$

soit plus simplement, en calculant immédiatement à l'aide de ces mêmes valeurs (D) les autres expressions inverses des précédentes, savoir :

$$\Delta_1^{-2}\varphi = \left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2, \qquad \Delta_1^{-2}\psi = \left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2,$$

$$\Delta_1^{-2}\varpi = \left(\frac{x}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varpi}\right)^2,$$

en vertu de formules très connues que l'on trouve dans la plupart des traités d'analyse et dont nous rappelons également la démonstration dans notre *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées curvilignes dans les problèmes de Mécanique* (équations (18), page 18 et (8), page 14), puis en en déduisant enfin les valeurs des invariants demandés. Par ce moyen les deux équations (18) et (B) seront bien alors deux équations linéaires aux dérivées partielles, l'une du second et l'autre du premier ordre entre la fonction inconnue θ ou $l\theta$ et les variables indépendantes φ, ψ, ϖ, la seconde de ces équations ne devant être, vérifiée que pour les seuls points de la surface $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) = 0$.

familles coordonnées, parallélipipède ayant pour arrêtes par conséquent les trois éléments de normale δn, $\delta n'$, $\delta n''$ dont les valeurs sont, en vertu de la formule (40bis) du *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (page 44),

$$(19) \qquad \delta n = \frac{d\varphi}{\Delta_1\varphi}, \qquad \delta n' = \frac{d\psi}{\Delta_1\psi}, \qquad \delta n'' = \frac{d\varpi}{\Delta_1\varpi},$$

l'élément de masse sera par suite actuellement

$$dm = \rho\, \delta n \delta n' \delta n'' = \rho\, \frac{d\varphi d\psi d\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi},$$

et par conséquent, en considérant toujours un volume fixe, délimité par une surface arbitraire, que nous désignerons par S, au sein du milieu proposé, la quantité totale de chaleur gagnée, pendant le temps dt, par la masse renfermée à l'intérieur de ce volume, aura pour première expression :

$$(20) \qquad \mathbf{S}\, cgdm \frac{d\theta}{dt} dt = \iiint cg\rho\, \frac{d\varphi d\psi d\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi} \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Nous en obtiendrons comme tout à l'heure une seconde, en évaluant encore d'abord la quantité de chaleur qui traverse dans le même temps dt un élément ω de la surface S qui limite ce volume, c'est-à-dire le gain ou la perte de chaleur qui s'effectue pour la masse considérée par ce même élément dans ce temps dt, laquelle sera toujours donnée par la formule (13), où $\delta\theta$ sera alors, par définition d'abord, puis en ayant égard aux trois égalités (19),

$$\delta\theta = \frac{\theta}{\varphi} d\varphi + \frac{\theta}{\psi} d\psi + \frac{\theta}{\varpi} d\varpi = \frac{\theta}{\varphi} \cdot \Delta_1\varphi\, \delta n + \frac{\theta}{\psi} \cdot \Delta_1\psi\, \delta n' + \frac{\theta}{\varpi} \cdot \Delta_1\varpi\, \delta n'',$$

en sorte que cette quantité de chaleur aura dès lors pour expression, en tenant compte de la valeur qui précède,

$$(21) \left\{ \begin{aligned} -Q\omega \frac{\delta\theta}{\delta N} dt &= -Q\omega \left(\Delta_1\varphi \frac{\theta}{\varphi} \frac{\delta n}{\delta N} + \Delta_1\psi \frac{\theta}{\psi} \frac{\delta n'}{\delta N} + \Delta_1\varpi \frac{\theta}{\varpi} \frac{\delta n''}{\delta N} \right) dt \\ &= -Q\omega \left(\Delta_1\varphi \frac{\theta}{\varphi} \cos\alpha + \Delta_1\psi \frac{\theta}{\psi} \cos 6 + \Delta_1\varpi \frac{\theta}{\varpi} \cos\gamma \right) dt, \end{aligned} \right.$$

en désignant cette fois par α, β, γ, les angles de la normale intérieure N de cette surface S, non plus avec les axes de coordonnées rectilignes x, y, z, qui n'interviennent plus en rien dans la question actuelle, mais avec les normales aux trois surfaces coordonnées, qui jouent désormais le rôle de ces axes rectilignes dans la question précédente; car il est clair que ∂n, $\partial n'$, $\partial n''$, et ∂N correspondant par hypothèse aux mêmes accroissements simultanés $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi$ des coordonnées φ, ψ, ϖ, on aura dès lors entre eux les relations :

$$(22) \qquad \partial n = \partial N \cos\alpha, \qquad \partial n' = \partial N \cos\beta, \qquad \partial n'' = \partial N \cos\gamma.$$

Cette expression du flux élémentaire pour le cas actuel étant acquise, nous aurons évidemment pour celle du gain ou de la perte totale de chaleur, éprouvée par cette même masse, pendant le temps dt

$$(23) \qquad -\sum Q\omega\frac{\partial\theta}{\partial N}dt = -\sum Q\omega\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\cos\alpha + \Delta_1\psi\frac{\theta}{\psi}\cos\beta + \Delta_1\varpi\frac{\theta}{\varpi}\cos\gamma\right)dt,$$

la sommation $\sum$ s'étendant à tous les éléments qui composent la surface S.

Nous transformerons maintenant, comme tout à l'heure, cette dernière somme, en la décomposant en trois sommes particlles, correspondant chacune à l'un des termes de la parenthèse, et nous considérerons à part, pour la première, qui sera $-\Sigma\, Q\,\omega\,\Delta_1\varphi\,\frac{\theta}{\varphi}\cos\alpha\, dt$, les deux points où la surface S est rencontrée par un même arc d'intersection PQ de deux surfaces ψ et ϖ quelconques (*), points pour lesquels la coordonnée φ prend les deux valeurs φ_1 et φ_2, les deux autres coordonnées ψ et ϖ ayant par hypothèse les mêmes valeurs. En se laissant guider par des analogies évidentes, on apercevra sans peine alors que le cylindre projetant relatif au plan coordonné yz, que nous considérions

(*) Il y aurait lieu de placer ici, relativement aux points de rencontre de cet arc d'intersection avec la surface fermée S, une observation complètement analogue à celle que nous avons déjà faite plus haut pour les coordonnées rectilignes. (Voir la note de la page 18.)



dans la question précédente, et dont les génératrices étaient des droites parallèles à l'axe rectiligne des x, se trouve remplacé dans celle-ci par une surface S_0, circonscrite à la surface S, et engendrée par l'un de ces arcs d'intersection PQ, spécifiés tout à l'heure, ledit arc étant choisi de telle sorte que ses deux points de rencontre avec la surface S se confondent constamment en un seul, que nous désignerons d'une façon générale par φ_0; et dès lors, que l'ensemble de ces points φ_0, qui constituera la courbe de contact de la surface S avec son enveloppe S_0, jouera le rôle de la courbe de contour apparent dans le système précédent, d'où il suit tout d'abord que les deux points de rencontre φ_1 et φ_2 d'un même arc d'intersection PQ avec la surface S seront situés de part et d'autre de cette courbe de contact. Or, par sa définition même, tout le long de cette courbe, les surfaces S et S_0 ayant mêmes plans tangents et mêmes normales, il s'ensuit qu'en un quelconque de ses points φ_0, la normale N_0 de la surface S sera aussi normale à l'arc P_0Q_0 générateur de l'enveloppe S_0, et normal lui-même par hypothèse à la surface φ en ce point, comme étant l'intersection de deux surfaces ψ et ϖ.

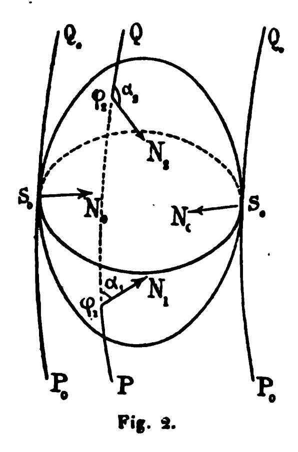


Fig. 2.

Cela revient à dire qu'en chacun des points φ_0 de cette courbe, l'angle α sera droit, et comme il variera d'une façon continue, qu'en général il sera aigu pour tous les points φ_1 situés d'un certain côté de cette courbe, et obtus pour tous les points φ_2 situés de l'autre côté.

Si donc nous convenons de nouveau de distinguer par les indices 1 et 2 les deux portions de la surface S, ainsi séparées par cette courbe de contact, et pour lesquelles l'angle α est constamment aigu ou obtus, on voit qu'en désignant par ω_1 et ω_2 les aires de deux éléments de cette surface empruntés à ces deux portions, situés aux deux points φ_1 et φ_2, à la rencontre du même arc d'intersection PQ avec la surface S, éléments qui, étant tous

deux arbitraires de forme et de grandeur, peuvent être choisis de telle façon qu'ils aient chacun le rectangle $\delta n'\delta n''$ relatif à ce point pour projection sur le plan tangent de la surface φ relative au même point, c'est-à-dire que l'on peut supposer déterminés, eu égard aux valeurs (19), par les deux équations

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1 \cos\alpha_1 &= (\delta n'\delta n'')_1 = \frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_1},\\ \omega_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = -\,\omega_2\cos\alpha_2 &= (\delta n'\delta n'')_2 = \frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_2},\end{aligned}\right.$$

on voit alors, disons-nous, qu'en effectuant séparément les sommations correspondant à chacune des deux portions de la surface, on devra écrire pour la première des trois sommes qui composerait l'expression (23)

$$\begin{aligned} -\sum Q\omega\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\cos\alpha\, dt &= -\,Q\left[\sum_1\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_1\omega_1\cos\alpha_1 + \sum_2\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_2\omega_2\cos\alpha_2\right]dt\\ &= -\,Q\left[\sum_1\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_1\frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_1} - \sum_2\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_2\frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_2}\right]dt\\ &= Q\left[\sum_2\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_2 d\psi d\varpi - \sum_1\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_1 d\psi d\varpi\right]dt,\end{aligned}$$

les deux sommations $\sum_1$ et $\sum_2$ qui sont maintenant relatives au même élément $d\psi d\varpi$, s'étendant à présent l'une et l'autre à toutes les valeurs des variables ψ et ϖ qui correspondent à des points situés à l'intérieur de la surface circonscrite S_0 définie plus haut. D'où il suit qu'elles peuvent être remplacées chacune par une intégrale double prise entre les limites que nous venons de dire, intégrales dont la différence équivaudra alors à une intégrale triple, étendue à tout le volume délimité par la surface S, ainsi que l'indiquent les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} -\sum Q\omega\,\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\cos\alpha\, dt &= Q dt\iint\left[\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_2 - \left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_1\right]d\psi d\varpi\\ &= Q dt\iiint\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)d\varphi d\psi d\varpi.\end{aligned}$$

On trouverait évidemment par le même procédé les deux autres égalités

$$\left\{\begin{aligned} -\sum Q\omega\Delta_1\psi\frac{\theta}{\psi}\cos 6\, dt &= Q\,dt\iiint\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)d\varphi d\psi d\varpi,\\ -\sum Q\omega\Delta_1\varpi\frac{\theta}{\varpi}\cos\gamma\, dt &= Q\,dt\iiint\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)d\varphi d\psi d\varpi,\end{aligned}\right.$$

de sorte qu'en additionnant ces trois dernières égalités, on aura pour la somme totale (23)

$$-\sum Q\omega\frac{\partial\theta}{\partial N}dt = Q\,dt\iiint\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)\right]d\varphi d\psi d\varpi;$$

et, en égalant dès lors cette seconde expression de la quantité de chaleur considérée à la précédente (20), nous aurons l'équation

$$\iiint cg\rho\frac{d\varphi d\psi d\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{d\theta}{dt}dt$$
$$= Qdt\iiint\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)\right]d\varphi d\psi d\varpi,$$

ou, en mettant en facteur Qdt, et faisant passer tous les termes dans un même membre, puis se rappelant que les deux intégrales triples sont relatives au même volume,

$$Qdt\iiint\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{cg\rho}{Q}\cdot\frac{1}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{d\theta}{dt}\right]d\varphi d\psi d\varpi = 0.$$

Or cette intégrale devant ainsi être nulle encore, quel que soit le volume arbitrairement choisi à l'intérieur duquel on la suppose

calculée, lorsque l'on y remettra pour θ la fonction de φ, ψ, ϖ, qui représentera la température, le Lemme démontré plus haut, et dont nous avons déjà fait usage dans le cas précédent, exigera de nouveau que la fonction intégrée soit identiquement nulle dans cette hypothèse : ce qui revient à dire que cette fonction θ vérifiera, en un point quelconque du corps, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\,\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\,\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\,\frac{\theta}{\varpi}\right)-\frac{k}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\,\frac{d\theta}{dt}=0,$$

en posant encore, comme dans le cas précédent, $k=\frac{cg\rho}{\mathfrak{U}}$, et nous retombons bien, comme on le voit, sur l'équation (18) déjà obtenue.

Nous avons donc ainsi fourni une démonstration entièrement rigoureuse de cette équation pour le système le plus général de coordonnées orthogonales, et basée sur la considération directe de ces coordonnées elles-mêmes, ainsi que le font Lamé, dans ses *Coordonnées Curvilignes* (§ XVI, pages 25-27), óu sa *Théorie Analytique de la Chaleur* (§ XIX, pages 27-29), et Résal, dans son excellent *Traité de Physique Mathématique* (*Chaleur*, § VI et VII, formules (11) et (12)), pour les deux systèmes cylindrique et sphérique seulement, mais en ayant recours l'un et l'autre au parallélipipède d'Euler et de Bernouilli, dont l'emploi donne lieu à la critique formulée plus haut dans la note de la page 11 ci-dessus, et généralement admise par tout le monde aujourd'hui (*).

(*) Si l'on voulait de même à présent, en vue d'établir pour ce cas général l'équation à la surface imposée par la loi du Rayonnement, au lieu de simples transformations analytiques comme dans la note de la page 23, avoir de nouveau recours à la considération directe des quantités géométriques qui entrent dans les calculs, raisonnant exactement comme nous l'avons fait pour arriver à l'équation (A) dans la note de la page 21, nous obtiendrons encore l'équation demandée en égalant au produit $e\theta\omega dt$ l'expression (21) du flux de chaleur élémentaire, calculée pour la surface externe du corps, et dans laquelle les angles α, β, γ seront dès lors ceux de la normale *extérieure* de cette surface avec les normales aux trois surfaces coordonnées, et auront par suite pour cosinus (en ayant égard



Ces préliminaires indispensables étant établis, abordons maintenant la question qui forme l'objet principal de cette étude.

---

aux valeurs connues des cosinus directeurs de la normale à cette surface $F(x, y, z) = 0$ ou $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) = 0$, par rapport aux trois axes rectilignes), savoir

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\lambda + \frac{F}{y}\mu + \frac{F}{z}\nu\right), \\ \cos\beta &= \pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\lambda' + \frac{F}{y}\mu' + \frac{F}{z}\nu'\right), \\ \cos\gamma &= \pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\lambda'' + \frac{F}{y}\mu'' + \frac{F}{z}\nu''\right), \end{aligned}\right.$$

expressions dans lesquelles les valeurs des neuf cosinus directeurs, $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu''$ devront être remplacées par celles fournies par le tableau (18) de notre *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 19), et qui, en supposant cette substitution opérée, se réduiront alors simplement aux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{x}{\varphi} + \frac{F}{y}\frac{y}{\varphi} + \frac{F}{z}\frac{z}{\varphi}\right) = \pm\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\mathcal{F}}\frac{\mathcal{F}}{\varphi}, \\ \cos\beta &= \pm\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{x}{\psi} + \frac{F}{y}\frac{y}{\psi} + \frac{F}{z}\frac{z}{\psi}\right) = \pm\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\mathcal{F}}\frac{\mathcal{F}}{\psi}, \\ \cos\gamma &= \pm\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{x}{\varpi} + \frac{F}{y}\frac{y}{\varpi} + \frac{F}{z}\frac{z}{\varpi}\right) = \pm\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\mathcal{F}}\frac{\mathcal{F}}{\varpi}. \end{aligned}\right.$$

En remettant donc ces valeurs à la place de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dans l'expression (21), pour avoir celle du flux élémentaire relative à la surface rayonnante du corps et l'égalant ensuite au produit $e\theta\omega dt$, nous obtiendrons ainsi l'équation

$$\mp\frac{Q\omega}{\Delta_1\mathcal{F}}\left[\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\cdot\Delta_1\varphi\frac{\mathcal{F}}{\varphi} + \Delta_1\psi\frac{\theta}{\psi}\cdot\Delta_1\psi\frac{\mathcal{F}}{\psi} + \Delta_1\varpi\frac{\theta}{\varpi}\cdot\Delta_1\varpi\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\right]dt = e\theta\omega\, dt;$$

d'où, en multipliant par $\frac{\Delta_1\mathcal{F}}{Q\theta\omega dt}$, puis remplaçant encore $\Delta_1\mathcal{F}$ par sa valeur (2), et posant de nouveau $\frac{e}{Q} = K$, on retrouve bien, comme par la voie analytique, la même équation (B) de la note de la page 23 ci-dessus :

$$\Delta_1^2\varphi\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\cdot\frac{l\theta}{\varphi} + \Delta_1^2\psi\frac{\mathcal{F}}{\psi}\cdot\frac{l\theta}{\psi} + \Delta_1^2\varpi\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\cdot\frac{l\theta}{\varpi}$$

$$\pm K\left[\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\right)^2 + \Delta_1^2\psi\left(\frac{\mathcal{F}}{\psi}\right)^2 + \Delta_1^2\varpi\left(\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

CHAPITRE II.

Équation aux dérivées partielles des familles isothermes de surfaces. — Méthode pour la recherche de ces familles de surfaces. — Solution la plus générale du problème de l'isothermie pour les surfaces du premier et du second ordre.

ÉQUATION DITE DE L'ÉQUILIBRE DE TEMPÉRATURE. — ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES FAMILLES ISOTHERMES DE SURFACES. — L'expérience apprend que tout corps, quels que soient son état initial et les conditions aux limites qu'on lui impose, pourvu qu'on les suppose indépendantes du temps, c'est-à-dire, en d'autres termes, tout corps soumis à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur, finit toujours par arriver, au bout d'un temps plus ou moins long, à un état stationnaire que l'on est convenu de désigner par le nom d'*équilibre de température*. L'échange réciproque de chaleur entre les différentes parties du corps, supposé homogène et isotrope, ne cessant pas d'être régi comme devant par l'équation (17), à partir de l'instant où cet état stationnaire est définitivement établi, et à dater duquel on a par conséquent constamment $\frac{d\theta}{dt} = 0$, il s'ensuit que la distribution de la température dans le corps sera, pour ce nouveau régime, déterminée par l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$, laquelle a reçu en conséquence le nom d'*Équation de l'Équilibre de température*.

La température θ en chaque point du corps étant alors supposée déterminée en x, y, z, à l'aide de cette nouvelle équation aux dérivées partielles et des conditions aux limites, ainsi que nous l'avons expliqué, on voit qu'en égalant la fonction ainsi obtenue, que nous désignerons par $f(x, y, z)$, à une constante quelconque, on aura une surface qui sera le lieu des points du corps pour lesquels la température sera précisément égale à la valeur de cette constante. Si donc l'on considère cette constante comme un paramètre variable que nous appellerons θ, on aura ce que l'on nomme une *Famille Isotherme* de surfaces, et l'on dira

de plus qu'elle est ***rapportée à son paramètre thermométrique.*** On convient enfin d'employer encore ces mêmes dénominations lorsque, au lieu de la fonction déterminée $\theta = f(x, y, z)$ elle-même, on en prendra une fonction linéaire quelconque, laquelle vérifiera tout aussi bien évidemment l'équation précitée, ou, en d'autres termes, lorsque l'on considérera la famille de surfaces représentée par l'équation

$$Af(x, y, z) + B = u.$$

Ainsi, dans tous les cas, le caractère essentiel du paramètre thermométrique u d'une famille isotherme de surfaces consistant en ce que ce paramètre, considéré comme fonction de x, y et z, vérifie l'équation de l'équilibre de température $\Delta_2 u = 0$, on voit que sa définition comporte essentiellement deux constantes arbitraires, c'est-à-dire que si θ désigne l'une de ses déterminations en particulier, son expression générale sera $u = \sigma\theta + \tau$.

L'expression (10), que nous avons donnée ci-dessus pour le second invariant Δ_2 d'une fonction de point quelconque ω, se trouvera notablement simplifiée, lorsque les trois coordonnées φ, ψ, ϖ satisferont à cette condition, car, en la prenant alors sous la forme précédente (9), on voit que cette même expression se réduira dans cette hypothèse à la forme simple, complètement analogue à celle (2) rencontrée dans tous les cas pour l'invariant du premier ordre Δ_1,

$$(25) \qquad \Delta_2\omega = \Delta_1^2\varphi \cdot \frac{\omega^2}{\varphi^2} + \Delta_1^2\psi \cdot \frac{\omega^2}{\psi^2} + \Delta_1^2\varpi \cdot \frac{\omega^2}{\varpi^2},$$

et qui se rapproche beaucoup plus de la forme originaire relative aux coordonnées rectilignes.

Dès lors l'énumération sommaire que nous avons faite des équations les plus connues de la Physique Mathématique dans lesquelles cet invariant intervient, équations que nous avons groupées plus haut sous le numéro (11), et qui toutes bénéficieront de la simplification que nous venons de dire, fait comprendre tout de suite l'avantage très grand qu'il y aura à prendre

pour système coordonné un système ainsi composé de trois familles isothermes, rapportées chacune à leur paramètre thermométrique, pour tous les problèmes relatifs à cette branche de la Science, dans lesquels l'emploi des coordonnées curvilignes sera imposé par la nature de la question (*). Ainsi, en particulier, l'équation du mouvement de la chaleur (17), établie tout à l'heure, devient simplement, avec cette hypothèse,

$$(26) \qquad \Delta_1^2\varphi \cdot \frac{\theta^2}{\varphi^2} + \Delta_1^2\psi \cdot \frac{\theta^2}{\psi^2} + \Delta_1^2\varpi \cdot \frac{\theta^2}{\varpi^2} = k\frac{d\theta}{dt},$$

et c'est effectivement en la ramenant à cette forme que Lamé a pu résoudre ainsi le premier le difficile problème de l'équilibre de température pour un corps limité par un ellipsoïde, en faisant usage d'un système de coordonnées mieux approprié que tout autre pour cet objet, et qui a reçu son nom en souvenir de ce fait considérable dans l'histoire de la Science, système auquel, en raison de son importance, nous consacrerons en entier le dernier Chapitre du présent travail.

De là résulte immédiatement la raison d'être de la recherche qui fait l'objet de ce Mémoire, vu l'intérêt très grand qui s'attache dès lors à connaître exactement, par le moyen de sa solution la plus générale, quelles sont les surfaces que l'on pourra faire entrer dans la composition d'un semblable système.

(*) « De là est venue l'idée des coordonnées curvilignes, dont l'emploi est indispensable » quand on veut traiter des corps de formes données, dans les diverses branches de la » physique mathématique.

» En effet, dans toutes ces branches, il s'agit toujours d'intégrer, ou de déterminer, » une ou plusieurs fonctions qui doivent vérifier une ou plusieurs équations aux diffé- » rences partielles du second ordre, exprimant les lois physiques qui régissent les fonc- » tions dont il s'agit. — Et, en outre, ces fonctions, ou leurs intégrales générales, doivent » vérifier d'autres équations aux différences partielles du premier ordre, pour tous les » points appartenant à la surface qui limite le corps que l'on veut traiter.

» Or, ce problème de double intégration serait complètement inabordable, si l'on ne » parvenait pas à *rapporter les points du corps à un système de coordonnées tel, que la* » *surface, ou les diverses parties qui la composent, soient exprimées par une de ces* » *coordonnées égalée à une constante.* C'est ainsi qu'on a pu traiter: le prisme rec- » tangle à l'aide des coordonnées rectilignes; le cylindre droit par les coordonnées » polaires; la sphère à l'aide des coordonnées sphériques; l'ellipsoïde par les coordon- » nées elliptiques. » (LAMÉ, LEÇONS SUR LES COORDONN. CURVIL. *Discours préliminaire*, pp. VIII-IX)

Mais la propriété caractéristique du paramètre thermométrique $\theta = f(x, y, z)$ d'une famille isotherme quelconque de surfaces étant ainsi de vérifier l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$, il est facile de voir que le paramètre en général d'une semblable famille, c'est-à-dire par conséquent d'une famille de surfaces propre à caractériser l'ensemble des points d'un milieu homogène et isotrope affectés d'une même température à l'état stationnaire, ne remplira pas forcément cette même condition, car il est clair que toute fonction arbitraire Φ de la fonction $f(x, y, z)$ et d'un paramètre variable λ donnera lieu à une autre équation, qui pourra être mise sous l'une ou l'autre des trois formes équivalentes

$$\Phi\left[f(x,y,z), \lambda\right] = 0, \qquad \lambda = \mathfrak{F}\left[f(x,y,z)\right], \qquad f(x,y,z) = \mathrm{F}(\lambda),$$

et qui représentera exactement la même famille de surfaces, bien que son paramètre λ, considéré comme fonction de x, y, z, ne vérifie plus évidemment en général l'équation $\Delta_2\lambda = 0$.

Une première question se pose donc alors, qui est la suivante. Étant donnée une famille quelconque de surfaces $\varphi(x, y, z) = \lambda$, à quel caractère analytique reconnaîtra-t-on que cette famille de surfaces est isotherme ?

La réponse est simple et facile, et découle immédiatement de la définition qui précède du paramètre thermométrique. Pour que cette dernière équation représente une famille isotherme de surfaces, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(x, y, z)$ puisse être mise sous la forme $\varphi(x, y, z) = \mathfrak{F}[f(x, y, z)]$, ce qui revient à dire qu'il devra exister entre les deux paramètres θ et λ la relation arbitraire

$$(27) \qquad \lambda = \mathfrak{F}(\theta), \qquad \text{ou inversement} \qquad \theta = \mathrm{F}(\lambda).$$

Or deux différentiations successives donneront alors, en vertu de la définition même du paramètre thermométrique θ,

$$\Delta_2\theta = \mathrm{F}'(\lambda).\Delta_2\lambda + \mathrm{F}''(\lambda).\Delta_1^2\lambda = 0,$$

d'où l'on tirera, par suite, la condition

$$(28)\qquad \frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = -\frac{F''(\lambda)}{F'(\lambda)} = -\frac{d.lF'(\lambda)}{d\lambda} = -\Psi(\lambda),$$

ou

$$(29)\qquad \Delta_2\lambda + \Psi(\lambda)\Delta_1^2\lambda = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = \Lambda$ devra pouvoir être exprimé en fonction de λ seule : condition dont on s'assurera aisément, si l'équation de la famille de surfaces peut être résolue, par rapport à l'une des variables, en remettant dans l'expression Λ de ce rapport, calculée à l'aide de l'équation proposée $\lambda = \varphi(x, y, z)$, à la place de l'une des coordonnées x, y, z, sa valeur tirée de cette même équation, et alors, pour que la condition demandée soit satisfaite, il faudra que les deux autres coordonnées disparaissent d'elles-mêmes; soit plus généralement, pour le cas où cette substitution ne serait pas possible, en vérifiant directement que deux quelconques des trois équations

$$(30)\qquad \frac{\Lambda}{y}\frac{\lambda}{z} - \frac{\Lambda}{z}\frac{\lambda}{y} = 0,\quad \frac{\Lambda}{z}\frac{\lambda}{x} - \frac{\Lambda}{x}\frac{\lambda}{z} = 0,\quad \frac{\Lambda}{x}\frac{\lambda}{y} - \frac{\Lambda}{y}\frac{\lambda}{x} = 0,$$

qui se réduisent à deux, et sont une conséquence nécessaire de l'hypothèse

$$\Lambda = -\Psi(\lambda),\quad \frac{\Lambda}{x} = -\Psi'(\lambda)\frac{\lambda}{x},\quad \frac{\Lambda}{y} = -\Psi'(\lambda)\frac{\lambda}{y},\quad \frac{\Lambda}{z} = -\Psi'(\lambda)\frac{\lambda}{z},$$

sont bien identiquement satisfaites, car il est clair qu'elles entraîneront alors entre les deux différentielles totales $d\Lambda$ et $d\lambda$ une relation de la forme $d\Lambda = \Omega d\lambda$, laquelle équivaut précisément à la même hypothèse que nous venons de dire.

Cette dernière condition étant supposée remplie, une seconde question non moins importante se pose aussitôt. La famille de surfaces donnée étant ainsi reconnue isotherme, quelle sera dès lors l'expression de son paramètre thermométrique en fonction du paramètre donné λ, que l'on peut par opposition désigner avec Lamé par le nom de *paramètre géométrique ?*

La réponse à cette nouvelle question est alors fournie par

l'équation (28), dans laquelle il faut maintenant considérer la fonction $\Psi(\lambda)$ comme donnée, et la fonction $F(\lambda)$ comme inconnue, et que l'on peut écrire dans ce but, en y remettant à la place de $F(\lambda)$, sa valeur θ résultant de l'hypothèse (27),

$$(31) \qquad \frac{d}{d\lambda}\log\frac{d\theta}{d\lambda} = \Psi(\lambda),$$

et d'où l'on tirera, en conséquence, par une première intégration,

$$(32) \qquad \log\frac{d\theta}{d\lambda} + \log\sigma = \int \Psi(\lambda)\,d\lambda \quad \text{ou} \quad \sigma\frac{d\theta}{d\lambda} = e^{\int \Psi(\lambda)d\lambda},$$

et de là, par une seconde intégration, en intervertissant les deux membres,

$$(32^{\text{bis}}) \qquad \int e^{\int \Psi(\lambda)d\lambda}\,d\lambda = \sigma\theta + \tau,$$

équation dont le second membre représente précisément le paramètre thermométrique de la famille donnée, avec les deux constantes arbitraires qui entrent essentiellement, avons-nous dit, dans sa définition, et qui dès lors, étant résolue par rapport à λ, fournira l'expression demandée du paramètre géométrique en fonction du paramètre thermométrique. Nous présenterons tout à l'heure, en terminant ce Chapitre, trois exemples simples de ce calcul, dont l'un nous fournira comme conséquence une interprétation physique intéressante des fonctions elliptiques de première espèce.

On voudra bien remarquer que nous avons dit, dès les premiers mots de cette théorie, comme nous le dirons constamment dans tout le cours de cet ouvrage, *famille isotherme* de surfaces, et non pas, ainsi que le dit Lamé, et qu'on le fait le plus généralement depuis lui, famille de *surfaces isothermes :* locution très vicieuse, à notre sens, en ce qu'elle fait croire a priori que la qualification d'*isotherme,* et par conséquent la définition correspondante, vise la surface elle-même, sauf à envisager ensuite une famille composée de surfaces ainsi définies individuellement, de même que l'on peut considérer une famille de sphères, d'ellipsoïdes, de cônes ou de tout autre type défini géométriquement,

tandis que la définition en question s'applique au contraire directement à la famille elle-même, et que cette même qualification d'isotherme, attribuée à une surface considérée isolément, ne présente, à notre avis, absolument aucun sens.

Effectivement, non seulement le sens de cette expression employée dans ces conditions ne ressort en aucune façon de la définition précitée, laquelle consiste tout entière à proprement parler dans l'équation $\Delta_2\theta = 0$, ou plus généralement l'équation ci-dessus (29); mais il y a plus, et l'on est autorisé à penser (nous ne savons au juste si la remarque en a déjà été faite, ne l'ayant rencontrée nulle part), qu'étant donnée une surface individuelle arbitrairement choisie $z = f(x, y)$, il existera en général une infinité de familles isothermes différentes qui reproduiront cette même surface, chacune pour une valeur convenablement déterminée du paramètre, ce qui montre bien l'inanité d'une semblable expression ainsi employée.

En effet, si l'on suppose ladite équation (29) intégrée sous la forme où elle se présente en l'état, c'est-à-dire λ y étant prise pour fonction inconnue, l'intégrale générale qui fournira l'expression de λ en x, y, z, comprendra des fonctions arbitraires qui seront telles que λ puisse se réduire, pour $z = z_0$ (z_0 désignant une constante *numérique* arbitrairement choisie), à une fonction donnée arbitrairement d'x et d'y, ou, en d'autres termes, que la famille isotherme de surfaces admette pour trace sur un plan donné parallèle aux xy une famille de courbes arbitrairement choisie. Mais on pourra aussi, avant d'intégrer cette même équation, changer de variables, et prendre z pour inconnue et x, y, et λ pour variables indépendantes. Or, si on l'intègre sous la dernière forme ainsi obtenue, l'intégrale générale qui exprimera alors z en fonction d'x, y et λ, devra renfermer des fonctions arbitraires qui seront telles que, pour une valeur *numérique* $\lambda = \lambda_0$ arbitrairement choisie, l'expression de z se réduise à une fonction d'x et y arbitrairement donnée, c'est-à-dire telle, par conséquent, que l'intégrale puisse reproduire la surface $z = f(x, y)$ supposée donnée arbitrairement à l'avance : et comme la constante λ_0 demeure arbitraire dans ce raisonnement, il y a donc lieu de présumer qu'en général il existera une infinité d'équa-

tions différentes entre z, x, y et λ, c'est-à-dire une infinité de familles isothermes différentes de surfaces, qui toutes satisferont également à la condition que nous venons de dire.

A la vérité, la conclusion qui précède n'est peut-être pas d'une certitude absolue, en raison des nombreuses lacunes ou irrégularités qui existent encore dans la théorie des équations aux dérivées partielles, ou, si l'on aime mieux, à cause des surprises que réservent à chaque instant les théories fondées sur la considération des dérivées des fonctions en général; mais si l'on abandonne les faits exceptionnels pour ne se préoccuper que de la généralité des cas, cette même conclusion offrira dès lors un degré de vraisemblance suffisant pour enlever toute signification certaine à la locution contre laquelle nous venons de nous élever, et pour la faire proscrire par conséquent du langage mathématique, à moins que l'on ne soit expressément convenu à l'avance de lui attribuer un sens faisant l'objet d'une définition nouvelle (*), qui ne sera en aucune façon une conséquence nécessaire de celle des familles isothermes de surfaces que nous venons d'énoncer.

Telles sont les deux questions fondamentales qui s'imposent, pour ainsi dire d'elles-mêmes, au début de la théorie des familles isothermes de surfaces, et qu'il nous était indispensable de rappeler d'une façon claire et précise, avant d'entreprendre la recherche que nous avons en vue dans ce travail, avec la solution qu'en a donnée Lamé, créateur de la théorie. Mais nous ne croyons pas devoir nous en tenir là, et puisque nous avons dû revenir sur ce sujet, on nous permettra d'élargir tant soit peu la question, et d'y ajouter encore, à titre de commentaires et de développements, une modeste contribution personnelle, dont les résultats nous seront d'un grand secours pour la recherche générale qui fait l'objet de ce Mémoire.

(*) C'est ce que nous avons fait dans notre *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées Curvilignes*, où nous adoptons cette expression, en vue d'abréger le discours, pour tenir lieu de la circonlocution : « Surface susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme. » (*Voir* l'AVANT-PROPOS et l'ERRATA (pp. 55 et 82) insérés en tête de ce Mémoire, pp. XXIII et XXV.)



Insuffisance de la solution théorique fournie par l'intégrale générale de cette équation. — Il semble au premier abord, d'après ce qui précède, que la solution du problème de l'isothermie soit dès lors renfermée tout entière dans l'intégration générale de l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$, ou plus généralement de l'équation (29), en sorte que cette intégration étant supposée effectuée par un procédé quelconque, il n'y ait plus de question. Mais il en va tout autrement dans la réalité. En effet, d'abord même au point de vue purement théorique, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que l'on eût déterminé, non seulement l'intégrale générale de ces équations, mais encore toutes leurs solutions singulières, ce que l'on ne sera jamais sûr d'avoir réalisé effectivement, vu l'absence de méthodes générales pour la recherche des solutions de cette espèce dans les équations aux dérivées partielles du second ordre; puis, au point de vue pratique, pour pouvoir utiliser les résultats de ces intégrations en vue de la constitution de nouveaux systèmes orthogonaux, il ne nous suffit pas d'être assurés que toutes les surfaces satisfaisant à la question sont bien comprises dans telle ou telle formule plus ou moins compliquée que nous aura fourni l'analyse, mais il nous faut encore pouvoir décider simplement, à la vue de ces formules, si telle famille déterminée de surfaces est comprise ou non dans ce résultat. Or les intégrales générales dont nous venons de parler, si elles fournissent bien à la vérité le moyen d'obtenir immédiatement autant de solutions particulières du problème que l'on voudra, satisfont fort mal par ailleurs à ce second côté de la question, et n'offrent dès lors pour l'objet que nous avons en vue qu'une utilité très restreinte.

Nous ferons mieux comprendre notre pensée à ce sujet, en envisageant d'abord, à titre d'exemple, les deux cas particuliers des cônes et des cylindres, cas pour lesquels l'intégration de l'équation $\Delta_2\theta = 0$, se ramène à l'intégrale classique de l'équation des Cordes Vibrantes.

La chose est manifeste pour les cylindres, car si l'on prend l'axe des z parallèle aux génératrices, la coordonnée z n'entrant plus dans l'équation de la famille de surfaces, l'équation $\Delta_2\theta = 0$

se réduit alors à

$$(33)\qquad \frac{\theta^2}{x^2}+\frac{\theta^2}{y^2}=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\theta^2}{y^2}=-\frac{\theta^2}{x^2},$$

et donne par suite pour intégrale générale, en faisant $i=\sqrt{-1}$,

$$(34)\qquad \theta=f_1(x+iy)+f_2(x-iy);$$

mais le même fait est moins évident dans le cas des familles de cônes. Nous ne savons si le résultat auquel il va nous conduire pour l'équation générale des familles isothermes de cônes en coordonnées rectilignes a déjà été signalé; en tout cas, ne l'ayant rencontré nulle part, nous croyons opportun de l'indiquer ici, aussi bien pour servir de point d'appui à la remarque sur laquelle nous nous proposons d'appeler l'attention, que parce que nous aurons l'occasion d'en faire usage utilement dans le Chapitre suivant.

L'équation $F(x, y, z, \lambda)=0$, ou $\varphi(x, y, z)=\lambda$ étant supposée représenter une famille de surfaces coniques, si on l'exprime à l'aide des coordonnées sphériques

$$(34^{\text{bis}})\qquad x=r\sin\theta\cos\omega, \qquad y=r\sin\theta\sin\omega, \qquad z=r\cos\theta,$$

se transformera, vu son homogénéité, en x, y, z, dans celle-ci

$$(35)\qquad F(\sin\theta\cos\omega, \sin\theta\sin\omega, \cos\theta, \lambda)=0, \qquad \text{ou} \qquad \lambda=f(\theta, \omega);$$

et, en même temps, l'expression classique de l'invariant Δ_2 d'une fonction de point quelconque V (*) (expression qu'il est facile d'ailleurs de déduire de notre formule (10) (**), en y faisant

(*) Voir si l'on veut SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, § 91, p. 129, en haut; ou encore JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. I, § 42, p. 45, en bas.

(**) Si l'on admet comme donnée l'expression classique de l'élément d'arc en coordonnées sphériques, le mode le plus simple d'opérer sera évidemment d'en conclure, par la comparaison avec l'expression générale de l'élément d'arc en coordonnées quelconques (ainsi que nous le faisons dans notre *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées Curvilignes*, page 153, au bas), les valeurs des trois invariants Δ_1, savoir

$$(\alpha)\qquad \Delta_1\varphi=1, \qquad \Delta_1\psi=\frac{1}{\varphi\sin\varpi}, \qquad \Delta_1\varpi=\frac{1}{\varphi},$$

$\omega = V$, $\varphi = r$, $\psi = \omega$, $\varpi = \theta$), savoir

$$(35^{bis})\qquad \Delta_2 V = \frac{1}{r}\frac{d^2.rV}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2V}{d\omega^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right)}{d\theta},$$

---

et, par suite, celles des coefficients

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{c} \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi = \dfrac{1}{\varphi^2\sin\varpi}, \\ \dfrac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi} = \varphi^2\sin\varpi, \qquad \dfrac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi} = \dfrac{1}{\sin\varpi}, \qquad \dfrac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi} = \sin\varpi, \end{array}\right.$$

lesquelles, étant reportées dans cette formule générale (10), donneront presque immédiatement, eu égard au changement de notation ci-dessus spécifié, la formule en question (35bis). — C'est ce que fait M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* (t. I, § 186, p. 187, en haut).

Mais si, au contraire, sans supposer aucune notion antérieure, l'on se propose d'appliquer de toutes pièces ladite formule (10) (à titre de vérification, par exemple), au système particulier de coordonnées défini par les équations (34bis), il faudra, en premier lieu, retrouver les mêmes valeurs (α), à l'aide de l'un ou l'autre des deux procédés indiqués dans la note de la page 24, c'est-à-dire : soit, quant au second d'abord, en partant des équations (34bis) elles-mêmes, récrites avec le changement de notation convenu, savoir

$$x = \varphi\sin\varpi\cos\psi, \qquad y = \varphi\sin\varpi\sin\psi, \qquad z = \varphi\cos\varpi,$$

et faisant usage des trois dernières formules de cette note, qui donneront alors immédiatement

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_1^{-2}\varphi = \sin^2\varpi\cos^2\psi + \sin^2\varpi\sin^2\psi + \cos^2\varpi = \sin^2\varpi + \cos^2\varpi = 1, \\ \Delta_1^{-2}\psi = \varphi^2\sin^2\varpi\sin^2\psi + \varphi^2\sin^2\varpi\cos^2\psi = \varphi^2\sin^2\varpi\ \sin^2\psi + \cos^2\psi) = \varphi^2\sin^2\varpi, \\ \Delta_1^{-2}\varpi = \varphi^2\cos^2\varpi\cos^2\psi + \varphi^2\cos^2\varpi\sin^2\psi + \varphi^2\sin^2\varpi = \varphi^2(\cos^2\varpi + \sin^2\varpi) = \varphi^2, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire précisément les inverses des valeurs précédentes (α); soit, quant au premier procédé, en partant des formules de transformation inverses de ces mêmes équations (34bis), transcrites avec les mêmes notations, savoir :

$$(\gamma)\qquad \varphi^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{tang}^2\varpi = \frac{x^2+y^2}{z^2},$$

et invoquant alors simplement les valeurs de définition des trois invariants $\Delta_1\varphi, \Delta_1\psi, \Delta_1\varpi$, qui appelleront dans ce cas les transformations suivantes.

Remarquant tout d'abord que ces dernières équations donneront

$$(\delta)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos^2\psi = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 = z^2\operatorname{tang}^2\varpi, \quad \varphi^2 = z^2(\operatorname{tang}^2\varpi+1) = \dfrac{z^2}{\cos^2\varpi}, \\ \text{d'où} \\ z^2 = \varphi^2\cos^2\varpi, \quad x^2+y^2 = z^2.\operatorname{tang}^2\varpi = \varphi^2\cos^2\varpi.\operatorname{tg}^2\varpi = \varphi^2\sin^2\varpi, \end{array}\right.$$

donnera pour la valeur de λ, exprimée par l'équation (35),

$$\Delta_2\lambda = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\frac{d\lambda}{d\theta}\right)}{d\theta}\right];$$

et dès lors l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ (en désignant exceptionnellement dans ce calcul par λ le paramètre thermométrique lui-même, afin d'éviter la confusion avec la coordonnée sphérique θ) sera, en multipliant par $r^2\sin^2\theta$,

$$(36)\qquad \frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \sin\theta\frac{d\left(\sin\theta\frac{d\lambda}{d\theta}\right)}{d\theta} = 0.$$

---

puis différentiant successivement en x, y, z ces mêmes équations (γ), ce qui donnera

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi\dfrac{d\varphi}{dx} = x, & \varphi\dfrac{d\varphi}{dy} = y, & \varphi\dfrac{d\varphi}{dz} = z, \\ \dfrac{1}{\cos^2\psi}\dfrac{d\psi}{dx} = -\dfrac{y}{x^2}, & \dfrac{1}{\cos^2\psi}\dfrac{d\psi}{dy} = \dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{\cos^2\psi}\dfrac{d\psi}{dz} = 0, \\ \dfrac{\text{tang}\,\varpi}{\cos^2\varpi}\dfrac{d\varpi}{dx} = \dfrac{x}{z^2}, & \dfrac{\text{tang}\,\varpi}{\cos^2\varpi}\dfrac{d\varpi}{dy} = \dfrac{y}{z^2}, & \dfrac{\text{tang}\,\varpi}{\cos^2\varpi}\dfrac{d\varpi}{dz} = -\dfrac{x^2+y^2}{z^3}, \end{array}\right.$$

on trouvera dès lors, en élevant au carré, et ajoutant dans chaque ligne,

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi^2\Delta_1^2\varphi = x^2 + y^2 + z^2, \\ \dfrac{1}{\cos^4\psi}\Delta_1^2\psi = \dfrac{1}{x^2}\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right] = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{x^2+y^2}{x^2}, \\ \dfrac{\text{tang}^2\varpi}{\cos^4\varpi}\Delta_1^2\varpi = \dfrac{1}{z^2}\left[\dfrac{x^2+y^2}{z^2} + \left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)^2\right] = \dfrac{1}{z^2}(\text{tang}^2\varpi + \text{tang}^4\varpi), \end{array}\right.$$

et enfin, en tenant compte des équations ci-dessus (γ) et (δ),

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi^2\Delta_1^2\varphi = \varphi^2, \qquad \text{ou} \qquad \Delta_1^2\varphi = 1, \\ \Delta_1^2\psi = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\cos^4\psi = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{\varphi^2\sin^2\varpi}, \\ \Delta_1^2\varpi = \dfrac{\cos^4\varpi}{z^2}(1+\text{tang}^2\varpi) = \dfrac{\cos^4\varpi}{\varphi^2\cos^2\varpi}\dfrac{1}{\cos^2\varpi} = \dfrac{1}{\varphi^2}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire de nouveau les valeurs précédentes (α) qu'il s'agissait d'établir, et desquelles l'on conclura comme tout à l'heure la même formule demandée (35bis).

Sous cette forme, on aperçoit immédiatement que, si l'on adopte à la place de la variable θ la fonction χ de cette variable définie par l'équation

$$(37) \qquad d\chi = \frac{d\theta}{\sin\theta} \qquad \text{ou} \qquad \chi = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta,$$

cette même équation deviendra simplement

$$(38) \qquad \frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \frac{d\left(\frac{d\lambda}{d\chi}\right)}{d\chi} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \frac{d^2\lambda}{d\chi^2} = 0, \quad (*)$$

et admettra par suite pour intégrale, comme l'équation ci-dessus (33) relative aux cylindres, l'équation

$$(39) \qquad \lambda = f_1(\omega + \chi i) + f_2(\omega - \chi i),$$

d'où l'on pourra déduire autant de solutions particulières du problème que l'on voudra, satisfaisant chacune à deux conditions arbitrairement données, relativement à la section des différentes surfaces composant la famille par un même plan azimutal ($\omega = 0$, par exemple), et à leurs plans tangents correspondant à cette section (**).

(*) En supposant même que l'idée si simple et si naturelle de ce changement de variable ne se fût pas présentée de prime abord à l'esprit, on eût encore été conduit au même résultat par voie de méthode générale, en appliquant à l'équation (36) le procédé classique d'Euler pour la transformation des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (Voir EULER, *Institutiones calculi integralis*, t. III, pp. 258 et sequ., ou JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III, § 273, pp. 351-352.)

(**) On pourra, par exemple, s'imposer les deux conditions, que pour cette section par le plan-origine des azimuts ou des xz, l'angle θ compris entre l'axe des z et l'une des génératrices correspondantes soit d'une part une fonction arbitrairement donnée du paramètre $f(\lambda)$, c'est-à-dire que l'on ait, pour $\omega = 0$,

$$(\alpha) \qquad \theta_0 = f(\lambda), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\theta_0}{d\lambda} = f'(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0 = \frac{d\lambda}{d\theta_0} = \frac{1}{f'(\lambda)},$$

ou en résolvant par rapport à λ, puis remplaçant θ_0 par sa valeur en fonction de χ_0, tirée de l'équation de définition (37),

$$(6) \qquad \lambda = F(\theta_0) = F(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\chi_0}) = F_1(\chi_0);$$

Or, revenons maintenant aux coordonnées planes, et dans ce but récrivons tout d'abord cette dernière équation sous la forme équivalente

$$(40) \qquad \lambda = \mathrm{F}_1\left[\operatorname{tg}(\omega + \chi i)\right] + \mathrm{F}_2\left[\operatorname{tg}(\omega - \chi i)\right],$$

---

et, d'autre part, que le plan tangent correspondant, qui contient déjà la génératrice, contienne en outre une autre direction (Ω, Θ) arbitrairement donnée en fonction de λ, condition qui le détermine dès lors complètement, et sera exprimée analytiquement par l'équation

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_0 \sin\Theta\cos\Omega + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)_0 \sin\Theta\sin\Omega + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)_0 \cos\Theta = 0.$$

Or, si l'on se reporte aux formules classiques qui donnent l'expression des dérivées $\frac{\lambda}{x}, \frac{\lambda}{y}, \frac{\lambda}{z}$ en fonction des coordonnées sphériques r, ω, θ et des dérivées relatives à ces coordonnées (voir, si l'on veut, SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t I, § 90, formules (4), p. 223), et qui se réduiront dans le cas actuel, en raison de ce que l'on a par hypothèse $\frac{d\lambda}{dr} = 0$, à celles-ci

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx} &= \frac{1}{r}\left[\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta\cos\omega - \frac{d\lambda}{d\omega}\frac{\sin\omega}{\sin\theta}\right], \\ \frac{d\lambda}{dy} &= \frac{1}{r}\left[\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta\sin\omega + \frac{d\lambda}{d\omega}\frac{\cos\omega}{\sin\theta}\right], \end{aligned}\right. \qquad \frac{d\lambda}{dz} = -\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta,$$

on voit que la condition précédente (γ), relative à la section $\omega = 0$, sera, étant exprimée en coordonnées sphériques,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0 \cos\theta_0 . \sin\Theta\cos\Omega + \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)_0 \frac{1}{\sin\theta_0} . \sin\Theta\sin\Omega - \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0 \sin\theta_0 . \cos\Theta = 0;$$

et, dès lors, si l'on y remplace à la fois Θ et Ω par leurs valeurs données en fonction de λ, ainsi que θ_0 et $\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0$ par leurs valeurs ci-dessus également données (α), on voit que cette équation étant alors résolue par rapport à $\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)_0$, fournira une valeur déterminée en λ, qu'on pourra ensuite exprimer en fonction de χ_0 à l'aide de la valeur (6), soit :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)_0 = \Phi(\lambda) = \Phi\left[\mathrm{F}_1(\chi_0)\right] = \mathrm{F}_2(\chi_0).$$

En résumé donc, les conditions imposées (α) et (γ) équivaudront à celle-ci, que, pour $\omega = 0$, λ et $\frac{d\lambda}{d\omega}$ se réduisent à deux fonctions données $\mathrm{F}_1(\chi)$ et $\mathrm{F}_2(\chi)$. Or la discussion du problème des Cordes Vibrantes nous a appris que l'intégrale générale (39) permettait toujours de satisfaire à ces deux conditions, et nous enseigne le procédé à suivre pour déterminer, par leur moyen, les deux fonctions arbitraires f_1 et f_2, qui y figurent.

car il est bien clair que, f et F étant deux fonctions arbitraires, les deux symboles $f(\alpha) = f(\text{arc tg}\,[\text{tg}\,\alpha])$ et $F\,[\text{tg}\,\alpha]$ ont exactement la même signification et la même étendue, et désignons, pour simplifier par u et v les deux expressions imaginaires conjuguées

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \text{tang}\,(\omega + \chi i) = \frac{\text{tg}\,\omega + \text{tg}\,\chi i}{1 - \text{tg}\,\omega\,\text{tg}\,\chi i}, \\ v &= \text{tang}\,(\omega - \chi i) = \frac{\text{tg}\,\omega - \text{tg}\,\chi i}{1 + \text{tg}\,\omega\,\text{tg}\,\chi i}. \end{aligned}\right.$$

Or, ayant en général, quel que soit χ,

$$\text{tang}\,\chi i = \frac{\sin \chi i}{\cos \chi i} = \frac{\frac{i}{2}(e^{\chi} - e^{-\chi})}{\frac{1}{2}(e^{\chi} + e^{-\chi})} = i\,\frac{e^{2\chi} - 1}{e^{2\chi} + 1},$$

et d'ailleurs, dans le cas particulier, par suite de la valeur (37),

$$\chi = \log \text{tg}\,\frac{1}{2}\theta = \log \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right),$$

d'où

$$e^{2\chi} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{2\chi} - 1}{e^{2\chi} + 1} = -\cos\theta,$$

nous aurons donc simplement dans la question actuelle

$$\text{tang}\,\chi i = -\,i\cos\theta,$$

et par suite, en substituant dans la valeur (41) de u, et revenant après cela aux coordonnées rectilignes,

$$u = \frac{\text{tg}\,\omega - i\cos\theta}{1 + \text{tg}\,\omega\,.\,i\cos\theta} = \frac{\frac{y}{x} - i\frac{z}{r}}{1 + \frac{y}{x}\cdot i\frac{z}{r}} = \frac{ry - izx}{rx + izy}$$

$$= \frac{(ry - izx)(rx - izy)}{(rx + izy)(rx - izy)} = \frac{(r^2 - z^2)\,xy - irz\,(x^2 + y^2)}{r^2x^2 + z^2y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(xy - irz)}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)} = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2}.$$

Par conséquent, les deux expressions conjuguées (41) de u et v seront, en coordonnées rectilignes,

$$(42) \qquad u = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2}, \qquad v = \frac{xy + irz}{x^2 + z^2},$$

et en les substituant dès lors, à la place de leurs valeurs (41), dans notre intégrale générale (40) de l'équation $\Delta_2\lambda = 0$, c'est-à-dire dans l'équation

$$(42^{bis}) \qquad \lambda = F_1(u) + F_2(v),$$

celle-ci deviendra définitivement

$$(43) \qquad \lambda = F_1\left(\frac{xy - irz}{x^2 + z^2}\right) + F_2\left(\frac{xy + irz}{x^2 + z^2}\right),$$

et fournira, pour chaque choix particulier des fonctions arbitraires F_1 et F_2, une double solution du problème; car, en supposant, dans ces conditions, le second membre ramené à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, il est clair que les deux fonctions P et Q vérifieront alors séparément l'équation $\Delta_2\lambda = 0$, en vertu de la définition même des quantités imaginaires, et pourront être adoptées dès lors indifféremment pour expression de λ (*).

(*) Le sens et le mode d'emploi de cette formule seront donc alors exactement les mêmes que pour toutes celles que donne Cauchy dans ses *Exercices de Physique Mathématique* (notamment, t. I, pp. 10, 138, et 215), pour représenter ce qu'il appelle les *déplacements symboliques* d'un système de molécules (supposés définis également par un système d'équations aux dérivées partielles, exclusivement linéaires et homogènes, de même que l'équation actuelle $\Delta_2\lambda = 0$), c'est-à-dire qu'en posant suivant ses notations $\bar{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{-1}$, l'équation en question (43), fournissant par hypothèse pour expression *symbolique* du paramètre la valeur $\bar{\lambda} = P + Q\sqrt{-1}$, équivaudra dès lors à elle seule aux deux équations réelles $\lambda_1 = P$ et $\lambda_2 = Q$, qui fourniront en conséquence chacune une solution différente pour l'expression réelle du paramètre demandé. La présence de l'imaginaire i dans cette formule n'est donc nullement un obstacle à son emploi sûr et commode, non plus que dans les formules précédentes (34) et (39), pour la solution de tel problème particulier que l'on voudra, dans lequel la famille de surfaces cherchée sera astreinte à satisfaire, en outre de l'équation $\Delta_2\lambda = 0$, à deux conditions données, ainsi que nous l'avons fait pour l'équation (39) dans la seconde note de la page 44.

Il est facile d'ailleurs de s'assurer directement que les deux fonctions P et Q ci-dessus définies satisferont séparément à l'équation proposée $\Delta_2\lambda = 0$ (ce qui équivaut à vérifier *a posteriori* les résultats analytiques que nous avons obtenus pour solutions), en procédant pour cette dernière formule (43) de la façon que nous allons indiquer, car pour les deux autres ce calcul est tellement simple qu'il n'y a pas lieu de nous y arrêter.

Telle est donc assurément l'équation la plus générale en coordonnées rectilignes des familles isothermes de surfaces coniques,

---

L'expression (43) ou (42[bis]) donnant, étant différentiée par rapport à une variable quelconque α,

$$\frac{\lambda}{\alpha} = F'_1 \cdot \frac{u}{\alpha} + F'_2 \cdot \frac{v}{\alpha}, \qquad \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = F''_1 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + F'_1 \cdot \frac{u^2}{\alpha^2} + F''_2 \left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 + F'_2 \cdot \frac{v^2}{\alpha^2},$$

on déduira de la seconde égalité, en faisant successivement $\alpha = x, y, z$, et ajoutant,

$$\Delta_2 \lambda = F''_1 \cdot \Delta_1^2 u + F'_1 \cdot \Delta_2 u + F''_2 \cdot \Delta_1^2 v + F'_2 \cdot \Delta_2 v,$$

et par conséquent il n'y aura qu'à s'assurer que les deux expressions (42) de u et v vérifient séparément les deux couples de conditions

$$\Delta_1^2 u = 0, \qquad \Delta_2 u = 0, \qquad \text{et} \qquad \Delta_1^2 v = 0, \qquad \Delta_2 v = 0;$$

c'est-à-dire, comme u et v sont deux imaginaires conjuguées $A \pm Bi$, qui donnent

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta_1^2 (A \pm Bi) = \Delta_1^2 A - \Delta_1^2 B \pm 2i \left(\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz}\right), \\ &\Delta_2 (A \pm Bi) = \Delta_2 A \pm i \Delta_2 B, \end{aligned} \right.$$

que, pour les expressions (42) de u et v, les quantités A et B vérifient bien les quatre conditions

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_1^2 A - \Delta_1^2 B = 0, \qquad \Delta_2 A = 0, \qquad \Delta_2 B = 0, \\ &\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour procéder à cette vérification, qui serait extrêmement pénible, soit avec les coordonnées sphériques, soit avec les coordonnées rectilignes, que nous avons successivement employées dans la question, la voie la plus facile consistera, en raison du dénominateur commun de ces expressions (42), à adopter un système de coordonnées cylindriques, en conservant la coordonnée y, et substituant dans le plan des zx, à x et à z, deux coordonnées polaires, en posant $x = \rho \cos \varphi$, et $z = \rho \sin \varphi$, système dans lequel on aura, pour les expressions des dérivées et des deux invariants Δ_1 et Δ_2 d'une fonction de point quelconque V, les formules classiques que l'on trouve dans tous les traités d'Analyse (voir par exemple SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, § 91, form. (2) et (6), pp. 127 et 128),

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\rho}\cos\varphi - \frac{dV}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}, \qquad \frac{dV}{dz} = \frac{dV}{d\rho}\sin\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}, \\ &\Delta_1^2 V = \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2, \qquad \Delta_2 V = \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\left(\rho \dfrac{dV}{d\rho}\right)}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\varphi^2}. \end{aligned} \right.$$

laquelle donne lieu à un paradoxe, dont le besoin de solution fera bien ressortir la nécessité des développements complémentaires que nous nous proposons d'apporter à la théorie de Lamé. En effet, il semble à première vue qu'elle ne doive renfermer que des surfaces de degré pair seulement, car le dénominateur commun des

---

Or les expressions (42) de u et v, étant transformées dans le même système, les deux quantités A et B et leurs dérivées premières prendront alors les valeurs

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned}
&A=\frac{y\cos\varphi}{\rho}, \quad \frac{dA}{dy}=\frac{\cos\varphi}{\rho}, \quad \frac{dA}{d\rho}=-\frac{y\cos\varphi}{\rho^2}, \quad \frac{dA}{d\varphi}=-\frac{y\sin\varphi}{\rho},\\
&B=\frac{\sin\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho}, \quad \frac{dB}{dy}=\frac{y\sin\varphi}{\rho\sqrt{y^2+\rho^2}}, \quad \frac{dB}{d\rho}=-\frac{y^2\sin\varphi}{\rho^2\sqrt{y^2+\rho^2}}, \quad \frac{dB}{d\varphi}=\frac{\cos\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho},
\end{aligned}\right.$$

et donneront dès lors séparément, en vertu des formules précédentes (6),

$$\left|\begin{aligned}
\Delta_1^2 A &= \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}+\frac{y^2\cos^2\varphi}{\rho^4}+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{y^2\sin^2\varphi}{\rho^2}=\frac{1}{\rho^2}\left(\cos^2\varphi+\frac{y^2}{\rho^2}\right),\\
\Delta_1^2 B &= \frac{y^2\sin^2\varphi}{\rho^2(y^2+\rho^2)}+\frac{y^4\sin^2\varphi}{\rho^4(y^2+\rho^2)}+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\cos^2\varphi\,(y^2+\rho^2)}{\rho^2}\\
&= \frac{1}{\rho^4(y^2+\rho^2)}\left[\rho^2y^2\sin^2\varphi+y^4\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\,(y^4+\rho^4+2y^2\rho^2)\right]\\
&= \frac{y^4+\rho^4\cos^2\varphi+\rho^2y^2+\rho^2y^2\cos^2\varphi}{\rho^4(y^2+\rho^2)}=\frac{y^2(y^2+\rho^2)+\rho^2\cos^2\varphi\,(\rho^2+y^2)}{\rho^4(y^2+\rho^2)}\\
&= \frac{1}{\rho^4}(y^2+\rho^2\cos^2\varphi)=\frac{1}{\rho^2}\left(\cos^2\varphi+\frac{y^2}{\rho^2}\right)=\Delta_1^2 A,
\end{aligned}\right.$$

d'où, en premier lieu, déjà

$$\Delta_1^2 A-\Delta_1^2 B=0.$$

Semblablement, on aura pour les dérivées secondes

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2A}{dy^2}=0, \quad \rho\frac{dA}{d\rho}=-\frac{y\cos\varphi}{\rho}, \quad \frac{d\left(\rho\frac{dA}{d\rho}\right)}{d\rho}=\frac{y\cos\varphi}{\rho^2}, \quad \frac{d^2A}{d\varphi^2}=-\frac{y\cos\varphi}{\rho},\\
&\frac{d^2B}{dy^2}=\frac{\rho\sin\varphi}{(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho\frac{dB}{d\rho}=-\frac{y^2\sin\varphi}{\rho\sqrt{y^2+\rho^2}}, \quad \frac{d\left(\rho\frac{dB}{d\rho}\right)}{d\rho}=\frac{y^2\sin\varphi(y^2+2\rho^2)}{\rho^2(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2B}{d\varphi^2}=-\frac{\sin\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho},
\end{aligned}\right.$$

arguments de l'une et l'autre des fonctions arbitraires n'étant pas décomposable en facteurs réels, et les deux termes de chacune de ces fractions étant de degré pair, aucune combinaison algébrique de ces arguments, si l'on fait ensuite disparaître les radicaux introduits par la fonction $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ne pourra

---

d'où l'on conclura, par la dernière formule ci-dessus (6) :

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta_2 A &= \frac{1}{\rho}\frac{y\cos\varphi}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{y\cos\varphi}{\rho} = 0,\\
\Delta_2 B &= \frac{\rho\sin\varphi}{(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\rho}\frac{y^2\sin\varphi(y^2+2\rho^2)}{\rho^2(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\sin\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho}\\
&= \frac{\sin\varphi}{\rho^3(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\rho^4+y^4+2\rho^2y^2-(y^2+\rho^2)^2\right]=0.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, pour la dernière condition, les deux premières formules (6) donnant

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx}+\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz} &= \left(\frac{dA}{d\rho}\cos\varphi - \frac{dA}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\left(\frac{dB}{d\rho}\cos\varphi - \frac{dB}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\\
&\quad + \left(\frac{dA}{d\rho}\sin\varphi + \frac{dA}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\left(\frac{dB}{d\rho}\sin\varphi + \frac{dB}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\\
&= \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho}\cos^2\varphi - \left(\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\rho}+\frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\varphi}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\\
&\quad + \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho}\sin^2\varphi + \left(\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\rho}+\frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\varphi}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\\
&= \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi},
\end{aligned}\right.$$

on aura donc de nouveau, avec les dérivées premières (γ),

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx}+\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy}+\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz} &= \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy}+\frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi}\\
&= \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{y\sin\varphi}{\rho\sqrt{y^2+\rho^2}} + \frac{y\cos\varphi}{\rho^2}\frac{y^2\sin\varphi}{\rho^2\sqrt{y^2+\rho^2}} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\cos\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho}\\
&= \frac{y\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2\sqrt{y^2+\rho^2}}\left[1+\frac{y^2}{\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}(y^2+\rho^2)\right]=0,
\end{aligned}$$

donner définitivement une équation réelle de degré impair en x, y et z. Et ce fait, d'un énoncé si précis, constituerait évidemment, s'il était confirmé, un résultat majeur pour la théorie des familles isothermes de cônes algébriques ; mais il se trouve démenti presque aussitôt, comme on va le voir, par un simple coup d'œil rétrospectif jeté sur l'équation aux dérivées partielles (38), qui nous a servi de point de départ.

En effet, lorsque l'on considère l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ sous cette forme (38), il est deux solutions très simples, en quelque sorte parallèles, qui s'offrent immédiatement à l'esprit, savoir

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = A\omega + B = A \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + B, \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(a\lambda + b), \\ \text{et} \\ \lambda = A\chi + B = A \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta + B = A \log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + B, \ (*) \end{array}\right.$$

c'est-à-dire la famille des plans azimutaux, et celle des cônes de révolution, du système des coordonnées sphériques, solutions dont la première, consistant en une équation homogène en x, y, z, doit évidemment être envisagée comme définissant une famille de surfaces coniques : or l'on voit qu'elle est exprimée par une équation réelle de degré impair en x, y, z, sans que l'on s'explique néanmoins comment elle peut être comprise dans l'intégrale générale (43), ou, en d'autres termes, sans que l'on aperçoive comment on pourra déterminer deux fonctions F_1 et F_2, capables

---

et par conséquent les quatre conditions (α), qu'il s'agissait de vérifier dans le cas actuel, sont bien satisfaites simultanément pour les valeurs de A et B relatives aux expressions proposées (42) : résultat qui confirme pleinement *a posteriori* l'exactitude de la double solution fournie comme nous l'avons expliqué, par notre équation trouvée ci-dessus (43).

(*) Tel est bien en effet le résultat auquel on parviendra, en appliquant à la famille des cônes $\frac{x^2+y^2}{z^2} = \operatorname{tang}^2\theta$ le procédé de Lamé que nous avons exposé un peu plus haut, pour la détermination du paramètre thermométrique d'une famille isotherme de surfaces. Mais si l'on veut s'en assurer en effectuant ce calcul, il faudra se rappeler, qu'en vue de conserver à la coordonnée sphérique θ son symbole habituel, nous avons étendu dans la question actuelle au paramètre thermométrique le symbole λ, dont nous avions fait usage exclusivement, dans la théorie générale exposée ci-dessus, pour représenter un paramètre géométrique.

de procurer l'identification de la forme (43) avec cette seconde forme de la première équation (44).

Cette apparente contradiction provient de ce que la propriété, que nous avons reconnue tout à l'heure à la forme d'équation (43), n'appartient qu'aux équations correspondant à une *expression algébrique* de λ, fournie par cette même équation, tandis qu'en raison du changement possible du paramètre dans l'équation de la famille de surfaces, c'est-à-dire de la substitution, à la place du paramètre thermométrique, d'une fonction arbitrairement choisie (algébrique ou transcendante) de ce paramètre (fonction qui constituera dès lors un nouveau paramètre auquel Lamé donne le nom de *géométrique*), les familles algébriques, qui satisfont à la condition d'isothermie, pourront fort bien n'être pas exclusivement fournies par les expressions de λ de forme algébrique provenant de la formule (43) : ou, en d'autres termes, il pourra arriver qu'une valeur transcendante de λ empruntée à cette formule fournisse néanmoins une famille de surfaces algébriques. C'est ce qui a lieu notamment pour les deux solutions simples (44) signalées tout à l'heure, qui, tout transcendantes qu'elles sont relativement à λ, correspondent cependant à deux familles algébriques, savoir, les plans, et les cônes de révolution, représentés par les équations

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \omega, \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \operatorname{tang}^2 \theta;$$

et l'on en aurait un second exemple plus étendu en considérant, ainsi que nous allons le dire à l'instant, pour le cas général, à la place des cônes de révolution, la famille de cônes homofocaux

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 0,$$

et recherchant l'expression de son paramètre thermométrique par le procédé que nous avons indiqué d'après Lamé.

En se plaçant à ce nouveau point de vue, et se reportant aux calculs qui nous ont conduit à cette forme d'intégrale (43), on aperçoit de suite qu'il suffira, pour retrouver la forme en ques-



tion (44), de prendre, pour les deux fonctions F_1 et F_2 qui figurent dans cette équation (43) ou (42bis), celles définies par les égalités

$$F_1(\alpha) = F_2(\alpha) = \frac{1}{2}(A \operatorname{arc tg} \alpha + B),$$

car l'équation (42bis) deviendra, avec ce choix particulier de fonctions,

$$\lambda = \frac{1}{2} A (\operatorname{arc tg} u + \operatorname{arc tg} v) + B,$$

ou ce qui est la même chose, en tenant compte des définitions (41) de u et v,

$$\lambda = \frac{1}{2} A(\omega + \chi i + \omega - \chi i) + B = A\omega + B = A \operatorname{arc tg} \frac{y}{x} + B.$$

Mais, si l'on est ainsi conduit tout naturellement à cette détermination par les considérations mêmes qui nous avaient amené à cette forme d'intégrale (43), il en eût été tout autrement si, faisant abstraction en pensée de ces mêmes considérations, l'on se fût trouvé de prime abord en présence de cette même intégrale générale, et il y a beaucoup de chance dans cette hypothèse pour que l'on n'eût pas aperçu alors que ce type (44) y était réellement compris, ou du moins on eût été fort embarrassé de décider la question d'après la seule connaissance de ce même type d'équation, et en ne s'inspirant d'aucune autre considération théorique.

Une remarque toute semblable s'offrira, pour le cas général, à propos de l'intégrale générale de l'équation $\Delta_2\theta = 0$, que l'on peut déduire immédiatement en faisant $u = \theta$, $t = z$, $a = i = \sqrt{-1}$, $z = 0$, de celle de l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

donnée par Poisson, pour la théorie des Petits Mouvements d'un

Gaz, ou de la Propagation du Son (*), sous la forme simple et remarquable

$$u = \frac{1}{4\pi} \mathrm{S}\, F_1(x + at\cos\alpha, y + at\cos 6, z + at\cos\gamma)\, td\omega$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt} \mathrm{S}\, F_2(x + at\cos\alpha, y + at\cos 6, z + at\cos\gamma)\, td\omega,$$

(S indiquant une somme étendue à tous les éléments ω d'une surface sphérique de rayon 1, situés chacun par hypothèse sur la direction (α, 6, γ)), solution qui sera par conséquent, pour le problème qui nous occupe, en opérant le changement de notation que nous venons de dire, et faisant dès lors la sommation S dans le plan seul des xy et non plus dans l'espace,

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} \theta = &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(x + iz\cos\alpha, y + iz\sin\alpha)\, zd\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} F_2(x + iz\cos\alpha, y + iz\sin\alpha)\, zd\alpha. \end{aligned} \right.$$

Cette formule, qui, comme les précédentes (34), (39), et (43), fournira encore une double solution du problème pour chaque choix particulier des fonctions F_1 et F_2 (**), procurera bien également, ainsi qu'elles, le moyen d'obtenir autant que l'on voudra de solutions de forme algébrique, satisfaisant chacune à deux conditions arbitrairement données à l'avance, ainsi que nous l'avons expliqué à propos du cas précédent (***), si les deux

(*) Voir, si l'on veut, pour la détermination de cette intégrale, DUHAMEL, *Cours de Mécanique*, t. II, § 217, notamment formule (4), pp. 349-350; ou JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III. § 294, pp. 378-382; ou encore DUHAMEL, *Éléments de Calcul infinitésimal*, t. II, § 157 (1re édit., pp. 223-226.)

(**) Voir le premier alinéa de la note de la page 47.

(***) On pourra cette fois s'imposer, entre autres, les deux conditions :

1° Que la section de la famille de surfaces par un plan fixe (le plan xy par exemple) soit une famille de courbes arbitrairement donnée, c'est-à-dire que l'on ait pour $z = 0$

$$(\alpha)\quad \theta_0 = f_1(x, y), \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0 = \frac{d\theta_0}{dx} = \frac{df_1(x, y)}{dx}, \quad \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0 = \frac{d\theta_0}{dy} = \frac{df_1(x, y)}{dy};$$

fonctions arbitraires F_1 et F_2 ainsi déterminées sont deux fonctions algébriques telles, que la quadrature relative à α n'introduise les variables x, y, z, c'est-à-dire les coefficients de la variable d'intégration, que sous forme simplement algébrique; mais rien n'indique que l'on pourra obtenir ainsi la totalité des familles isothermes de surfaces algébriques.

Et, en effet, ce n'est point à une expression algébrique du paramètre thermométrique θ, que correspond, par exemple, la solution remarquable du problème, trouvée par Lamé, pour les surfaces du second ordre, mais à la valeur transcendante fort compliquée

$$(46) \qquad \theta = \operatorname{Arg} \sin \operatorname{am} \rho = \int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2\rho^2)}},$$

où ρ^2 désigne la racine de l'équation du troisième degré

$$(47) \quad k^2h^2(\rho^2)^3-\left[x^2+y^2+z^2-(1+k^2)h^2\right](\rho^2)^2+(1+k^2)(x^2+y^2)\rho^2-x^2=0;$$

car tel serait bien le résultat que l'on obtiendrait, en supposant

---

2° Que pour chacune des surfaces composant la famille, et en chaque point (x, y) de cette même section, le plan tangent ait une orientation déterminée, c'est-à-dire soit normal à une certaine direction (α, β, γ), donnée arbitrairement en fonction de x, y et θ_0, condition qui le définit dès lors complètement, et qui s'exprimera analytiquement par l'équation

$$(\beta) \qquad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0 \cos\beta + \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 \cos\gamma = 0.$$

Or, si l'on remet dans cette équation, d'abord à la place de $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0$ et $\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0$ leurs valeurs (α), puis au lieu de $\cos\alpha$. $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs données en x, y, et θ_0, et enfin, cela fait, à la place de θ_0 lui-même sa valeur donnée (α), on voit que cette même équation (β) fournira alors pour $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0$ une valeur également déterminée, $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 = f_2(x, y)$, en sorte que les deux conditions géométriques proposées équivaudront en définitive à ces deux conditions analytiques, que, pour $z = 0$, θ et $\frac{d\theta}{dz}$ se réduisent simultanément aux deux fonctions données $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$. — Or, l'expression (45) de θ étant précisément composée de telle façon (voir Duhamel, *Éléments de Calcul infinitésimal*, t. II, § 157, pp. 223-226) que pour $z = 0$, elle se réduise, ainsi que sa dérivée $\frac{d\theta}{dz}$, respectivement aux deux fonctions $F_2(x, y)$ et $F_1(x, y)$, on voit ainsi qu'il suffira, pour satisfaire à la question, d'adopter dans cette même expression (45), pour les deux fonctions arbitraires F_2 et F_1, précisément les deux fonctions déterminées f_1 et f_2 que nous venons de spécifier.

résolue par rapport à θ l'équation des surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\theta} - \frac{y^2}{\operatorname{cn}^2\theta} - \frac{z^2}{\frac{1}{k^2}\operatorname{dn}^2\theta} = h^2, \tag{48}$$

que nous démontrerons dans ce Chapitre constituer la solution la plus générale du problème pour les surfaces du second ordre.

La considération exclusive des expressions de forme algébrique fournies par la formule (45) ne procurera donc en réalité aucune indication utile sur l'étendue et la nature des véritables solutions algébriques du problème, c'est-à-dire sur celles des surfaces algébriques capables de former des familles isothermes. Et il est hors de doute que la belle découverte de Lamé, que nous venons de rappeler, lui eût échappé, s'il eût borné son attention à la seule équation aux dérivées partielles précitée, et à son intégrale générale obtenue d'une façon quelconque.

En outre, il y aura lieu de se demander si la solution (46) et (47), ou (48), est bien, en réalité, renfermée dans l'intégrale générale (45), ou si elle ne constitue pas une solution singulière de l'équation $\Delta_2\theta = 0$ (*), car, sauf les solutions particulières évidentes

$$\theta = Ax + a, \qquad \theta = By + b, \qquad \theta = Cz + c,$$

ou celle, un peu moins restreinte, qui en découle par voie de conséquence immédiate

$$\theta = f(\lambda) = Ax + By + Cz + D, \tag{49}$$

c'est-à-dire une famille de plans parallèles, solutions complètement analogues aux solutions simples (44), rencontrées pour le

(*) On pourrait induire quelque présomption de vraisemblance en faveur de cette supposition de ce fait remarquable, que nous démontrons dans la suite (et qui n'a peut-être pas encore été signalé), à savoir que c'est pour la *seule* valeur $m = 2$ que le type d'équation $\frac{x^m}{a+\lambda} + \frac{y^m}{b+\lambda} + \frac{z^m}{c+\lambda} = 1$ peut fournir une famille de surfaces isothermes, en sorte que l'équation des surfaces homofocales du second ordre constitue en réalité, au point de vue de l'isothermie, un type entièrement isolé dans l'échelle des différents degrés.

cas particulier précédemment examiné (et qui sont fournies évidemment par la formule (45) en prenant pour les fonctions F_1 et F_2 respectivement une constante et une fonction linéaire) (*), aucun moyen simple et sûr ne permet d'apercevoir le choix particulier qu'il faudrait faire pour les fonctions arbitraires F_1 et F_2, pour pouvoir tirer de l'intégrale générale (45), soit la solution particulière (46) et (47), soit l'expression du paramètre θ correspondant à toute autre famille isotherme supposée donnée en particulier, ce qui réduit par suite à fort peu de chose les services que nous pouvons attendre ici de cette formule intégrale (45).

Nous n'avons envisagé dans les considérations qui précèdent, pour la recherche des familles isothermes, que l'intégrale générale de l'équation de l'équilibre de température $\Delta_2\theta = 0$, et non celle de l'équation aux dérivées partielles de forme plus générale (29). Celle-ci, en effet, outre qu'elle sera dans tous les cas beaucoup plus difficile à obtenir, en raison des termes non linéaires contenus dans cette équation (22), ne pourra très probablement jamais être fournie par aucune méthode, qu'à la condition de supposer particularisée à l'avance la fonction arbitraire $\Psi(\lambda)$, qui entre dans cette équation (29), et dès lors cette même forme d'équation perdant ainsi le seul avantage de généralité qu'elle possédait sur l'équation $\Delta_2\theta = 0$, et étant notablement plus compliquée par ailleurs, sera encore beaucoup moins propre qu'elle à l'étude de la question envisagée sous cet aspect.

Il est donc indispensable de reprendre à nouveau le problème, en l'abordant cette fois directement, tel qu'il se présente dans la pratique, c'est-à-dire de chercher un procédé qui permette de

(*) Ou, plus généralement, la solution $\theta = F(x, y, z)$, en désignant par $F(x, y, z)$ un polynôme entier de degré m, dont les coefficients sont supposés vérifier toutes les conditions, en nombre moindre évidemment, qui expriment que les coefficients de tous les différents termes en x, y, z du polynôme $\Delta_2 F(x, y, z)$ sont séparément nuls; car on reconnaît très aisément que la solution générale (45) donnera pour θ une expression de cette forme, en prenant simplement pour les fonctions arbitraires $F_1(x, y, z)$ et $F_2(x, y, z)$ deux polynômes entiers (à coefficients imaginaires) dont les degrés soient respectivement $(m-1)$ et m



décider sûrement et commodément si telle catégorie, donnée comme l'on voudra, de surfaces algébriques peut constituer une famille isotherme, et, le cas échéant, de déterminer quels devront être pour cela les expressions de ses coefficients. — Tel sera l'objet auquel nous consacrerons le reste de ce Chapitre.

Méthode pour la recherche des familles isothermes composées de surfaces algébriques appartenant a une catégorie déterminée. — La méthode que nous avons indiquée, d'après Lamé, pour reconnaître si une famille de surfaces donnée réalise ou non la condition de l'isothermie, et qui consiste à proprement parler dans une simple vérification, présente le défaut de toutes les méthodes de déduction fondées sur des procédés purement différentiels, à savoir que ses conclusions sont limitées strictement au type particulier qui fait l'objet de la recherche, et ne font connaître en aucune façon s'il existe d'autres types, rentrant dans une même catégorie définie par la forme ou le degré de l'équation, qui réalisent également ce même caractère de l'isothermie. Ainsi, pour prendre l'exemple le plus saillant, pour les surfaces du second ordre, Lamé pose d'emblée le type des surfaces homofocales, et il établit très nettement et très rapidement, à l'aide de la vérification que nous reproduirons un peu plus loin, qu'une pareille famille de surfaces satisfait bien à la condition de l'isothermie, mais rien ne montre dans son raisonnement que ce type soit le seul, ni même le plus général, tandis qu'il serait intéressant de savoir s'il existe, en dehors de ce type, d'autres familles du second ordre réalisant également le caractère de l'isothermie. Aussi croyons-nous faire œuvre utile en présentant pour le même objet, une méthode d'induction rigoureuse, basée, elle au contraire, sur des procédés de calcul intégral, qui, bien que plus longue et plus pénible assurément, aura ce grand avantage de nous fournir en toute certitude la solution complète du problème de l'isothermie, relativement à une catégorie de surfaces déterminée, et nous permettra d'affirmer en particulier que, pour les surfaces du second ordre, le type signalé par Lamé est bien réellement le seul qui satisfasse à la question.

A cet effet, représentons par $\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$, ou plus simplement par $\Lambda = 0$, en faisant $\varphi(x, y, z, \lambda) = \Lambda$, une équation de forme donnée en x, y, z, les coefficients étant supposés des fonctions indéterminées du paramètre λ. Il s'agit de savoir s'il est possible de déterminer ces coefficients de telle sorte que la famille de surfaces représentée par cette équation soit isotherme, et, le cas échéant, d'effectuer cette détermination.

Si nous conservons, dans ce but, notre notation habituelle pour les dérivées partielles relatives aux trois variables x, y, z, considérées seules comme indépendantes, et la notation usuelle avec la caractéristique ∂ pour les dérivées partielles relatives aux quatre variables x, y, z et λ, considérées simultanément comme indépendantes, en différentiant deux fois de suite par rapport à x l'équation proposée, et faisant, pour abréger,

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda} = \Lambda' \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2} = \Lambda'',$$

nous obtiendrons successivement, suivant une formule connue,

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \Lambda'\frac{\lambda}{x} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\lambda}{x} = -\frac{1}{\Lambda'}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}, \\ &\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\Lambda'}{\partial x}\frac{\lambda}{x} + \Lambda''\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 + \Lambda'\frac{\lambda^2}{x^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

ou, en remettant dans cette équation à la place de $\frac{\lambda}{x}$ la valeur qui précède,

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} - \frac{2}{\Lambda'}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \Lambda''\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 + \Lambda'\frac{\lambda^2}{x^2} = 0;$$

d'où l'on conclura ensuite, en ajoutant les trois équations semblables, supposées écrites successivement pour x, y, z,

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2} - \frac{2}{\Lambda'}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\frac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\frac{\partial\Lambda'}{\partial z}\right) \\ &\qquad\qquad + \Lambda''.\Delta_1^2\lambda + \Lambda'.\Delta_2\lambda = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on suppose isotherme la famille de surfaces proposée, on devra avoir, en vertu de l'équation ci-dessus (28), en représentant par T = — $\Psi(\lambda)$ une fonction arbitraire du paramètre λ,

$$(52)\qquad \frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = -\Psi(\lambda) = \mathrm{T}, \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2\lambda = \mathrm{T}\Delta_1^2\lambda,$$

et, par suite, on aura dans le cas actuel

$$\Lambda''.\Delta_1^2\lambda + \Lambda'.\Delta_2\lambda = (\Lambda'' + \mathrm{T}\Lambda')\Delta_1^2\lambda$$
$$= (\Lambda'' + \mathrm{T}\Lambda').\frac{1}{\Lambda'^2}\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2\right],$$

en ayant égard à la valeur de $\Delta_1^2\lambda$ que l'on déduit immédiatement de l'équation de droite (50). On obtient donc définitivement, en reportant cette dernière valeur dans l'équation (51), et multipliant en même temps par Λ'^2,

$$(53)\quad \begin{cases} \Lambda'^2\left(\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2}\right) - 2\Lambda'\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial y}\dfrac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial z}\dfrac{\partial\Lambda'}{\partial z}\right) \\ \qquad + (\Lambda'' + \mathrm{T}\Lambda')\left[\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \end{cases}$$

équation qui devra être vérifiée, quels que soient x, y, z, lorsque la famille proposée sera isotherme, c'est-à-dire que, si l'on borne l'application de cette théorie, comme nous le ferons expressément, aux seules surfaces algébriques, tous les coefficients des différents termes en x, y, z devront être séparément nuls. Or, en raison de la présence des deux dérivées Λ' et Λ'' dans cette équation, la seconde n'y entrant que linéairement seulement, il est visible que ces différents coefficients contiendront dans leur expression, non seulement les coefficients de l'équation proposée $\Lambda = 0$, mais encore leurs dérivées premières et secondes, celles-ci sous forme linéaire seulement, en sorte que ces derniers coefficients, c'est-à-dire nos inconnues, seront ainsi astreints à à vérifier un système d'équations différentielles du second ordre,

linéaire par rapport aux dérivées secondes, dont le nombre sera égal à celui des coefficients de l'équation que nous venons de former (53) (*).

Si l'équation proposée $\Lambda = 0$, supposée algébrique, est de degré m, les deux dérivées Λ' et Λ'' étant du même degré en x, y, z, les trois termes dont se compose cette équation (53) seront tous trois du degré $3m - 2$, savoir pour chacun

$$2m + (m - 2) = m + (m - 1) + (m - 1) = m + 2(m - 1) = 3m - 2,$$

nombre qui, sauf pour $m = 1$, sera toujours plus grand que m. Le nombre n des coefficients de l'équation proposée, c'est-à-dire des inconnues, sera donc ainsi dans tous les cas moindre que le nombre N des coefficients de cette dernière équation (53), ou des équations auxquelles devront satisfaire ces inconnues, résultat auquel il fallait s'attendre *a priori*, du moment que la condition de l'isothermie constitue pour une famille de surfaces une particularité spéciale, et qu'en conséquence il ne sera pas toujours possible, avec une forme donnée pour l'équation $\Lambda = 0$, de déterminer ces coefficients de telle sorte que la famille en question réalise cette condition, ce qui serait au contraire toujours possible, si le nombre des équations à satisfaire était égal ou inférieur au nombre des inconnues à déterminer (**). De plus, le rapport $\frac{N - n}{n}$, dont la valeur mesure en quelque sorte la *surabondance* du système, croissant constamment et assez rapi-

(*) On pourra à la vérité, si l'on veut, réduire d'une unité dans tous les cas, et souvent de plusieurs, le nombre des équations à vérifier, en faisant disparaître un terme (ou éventuellement plusieurs à la fois) de l'équation en question (53), par l'élimination de ce terme (ou de ces termes, lorsque ce sera possible) à l'aide de l'équation proposée $\Lambda = 0$ elle-même, multipliée à cet effet par un facteur convenable. Nous faisons usage de cet artifice dans l'exemple ci-après II° relatif à la sphère.

(**) Comme pour $m = 1$ on aura $N = n$, il est donc certain *a priori* qu'il existera des familles isothermes de plans; et par conséquent, pour le premier ordre, le problème de l'isothermie se réduira à déterminer la forme des expressions en λ des divers coefficients de la famille de plans: détermination fort importante par les conséquences géométriques qu'elle entraîne, ainsi que nous le montrerons.

dement avec m (*) à partir de $m = 2$, cas pour lequel l'excès $N - n$ du nombre des équations sur celui des inconnues est déjà égal à 26 (ou 25, suivant que l'on aura disposé arbitrairement, ou non, du coefficient du terme indépendant), on voit par là qu'il y aura de moins en moins de chances de rencontrer de pareilles familles de surfaces algébriques, au fur et à mesure que l'on élèvera le degré, ou simplement le nombre des termes, de l'équation de la famille de surfaces à laquelle on appliquera la méthode.

De ce simple aperçu on peut déduire, en outre, pour le cas le plus général, trois conséquences importantes.

En premier lieu, la solution étant actuellement fournie par un

---

(*) En effet, le nombre des termes d'un polynôme complet de degré m à trois variables étant

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} = \frac{m^3+6m^2+11m+6}{6} = 1 + \frac{m}{6}(m^2+6m+11),$$

si l'on convient, dans l'équation $A = 0$, d'attribuer à l'avance pour coefficient au terme indépendant une constante quelconque arbitrairement choisie, le nombre n des inconnues sera en réalité seulement $n = \frac{m}{6}(m^2 + 6m + 11)$ D'autre part, le nombre N des termes de l'équation (53), dont le premier membre est un polynôme complet de degré $3m - 2$, étant

$$N = \frac{(3m-1)\,3m\,(3m+1)}{1.2.3} = \frac{3m}{6}(9m^2 - 1),$$

et, par suite, le rapport $\frac{N}{n}$ et sa dérivée ayant en général pour expressions

$$\frac{N}{n} = 3\,\frac{9m^2 - 1}{m^2 + 6m + 11}, \qquad \frac{d}{dm}\left(\frac{N}{n}\right) = 3\,\frac{54m^2 + 200m + 6}{(m^2 + 6m + 11)^2},$$

l'on voit, tous les coefficients de cette dérivée étant positifs, que le dit rapport ira constamment en croissant, pour toutes les valeurs positives de m. Il en sera donc évidemment de même de l'autre rapport, envisagé ci-dessus, $\frac{N-n}{n} = \frac{N}{n} - 1$, lequel croît même assez rapidement à partir de $m = 1$, car ses valeurs successives pour les premiers nombres entiers sont respectivement, d'après l'expression précédente du rapport $\frac{N}{n}$, savoir

$$\left\{\begin{array}{llllll} m = 1, & 2, & 3, & 4, & 5,\ldots \\ \frac{N-n}{n} = \frac{1}{3}, & 2 + \frac{8}{9}, & 5 + \frac{12}{38}, & 7 + \frac{7}{17}, & 9 + \frac{4}{22},\ldots \end{array}\right.$$

résultat qui rend dès lors très vraisemblable le fait conjectural que nous énonçons plus haut.

système d'équations différentielles ordinaires, et non plus par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, la recherche des solutions singulières, s'il en existe, sera soumise à une méthode régulière et classique (*), ce qui n'avait pas lieu auparavant.

En second, lieu il est clair que la solution la plus générale de la question ne comportera plus dans le cas actuel, c'est-à-dire en restreignant le problème aux seules surfaces algébriques, que des constantes arbitraires seulement, et non plus des fonctions arbitraires (sauf, bien entendu, celle figurée par la fonction T), comme le ferait supposer le mode d'intégration de l'équation de l'équilibre de température $\Delta_2\theta = 0$, emprunté à la Physique Mathématique, que nous relatons un peu plus haut.

En troisième lieu enfin, si l'on excepte le cas de $m = 1$ pour lequel ou aura $N = n$, toutes les équations du système, au nombre de N, étant, avons-nous dit, linéaires par rapport aux dérivées secondes des n inconnues, si l'on prend n distinctes de ces équations, et qu'on en tire les valeurs des n dérivées secondes pour les reporter dans les autres équations, on formera, en général, un système de $N - n$ équations différentielles du premier ordre seulement, qui devront être compatibles pour qu'il existe une solution, et auxquelles les n inconnues seront astreintes à satisfaire. Or, en supposant que parmi ces équations il en existe au moins n qui soient distinctes, l'obligation pour les n inconnues, de vérifier en particulier le système ainsi formé de n de ces équations simultanées du premier ordre, montre que, toutes les fois que l'on sera parvenu à constituer un pareil système, la solution la plus générale du problème ne saurait renfermer, au maximum, plus de n constantes arbitraires. Encore n'est-il pas sûr que ces n constantes existent bien alors en réalité dans la solution, car en supposant obtenue l'intégrale générale de ce dernier système avec ses n constantes arbitraires, il faudra que les mêmes expressions des inconnues vérifient encore, non seulement les $N - 2n$ autres équations du premier ordre, mais

(*) Voir, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III, § 10, pp. 14-16.

aussi les n équations du second ordre que nous avions mises tout d'abord à part, et qui nous avaient servi à éliminer les n dérivées secondes. Or il est fort possible que la vérification ultérieure de ces $N - n$ équations, des premier et second ordres, ne puisse être ensuite obtenue qu'à la condition d'établir un certain nombre de relations entre les constantes introduites par l'intégration, relations qui réduiraient par conséquent d'un nombre égal le nombre des constantes réellement arbitraires de la solution. Le développement du calcul pourra seul trancher cette nouvelle question, mais, quelle qu'en doive être la réponse, nous sommes toujours assurés à l'avance que la solution la plus générale ne pourra comporter qu'un nombre de constantes arbitraires au plus égal à celui des inconnues, c'est-à-dire des coefficients de l'équation proposée $\Lambda = 0$, nombre qui, pour le degré m, sera par conséquent au maximum de $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}$. Cette dernière remarque sera du plus grand secours, comme on le verra, pour la solution du problème à l'aide de notre méthode.

Il est, à la vérité, un cas que nous avons dû laisser de côté dans le raisonnement qui précède : c'est celui dans lequel on ne pourrait ainsi former, par l'élimination des dérivées secondes entre les N équations primitivement posées, qu'un nombre $n - k$ d'équations distinctes du premier ordre, moindre que le nombre n des inconnues, et insuffisant par conséquent pour assurer à elles seules leur détermination. Mais il est facile de voir que, même pour ce cas, une conclusion analogue s'imposera encore en général, si le nombre k des équations ainsi manquantes n'est pas supérieur à 2.

En effet, comme l'on pourra, en général, sans modifier la nature ni la définition de la famille de surfaces représentée par l'équation $\Lambda = 0$:

1° Diminuer d'une unité seulement le nombre des coefficients à déterminer de cette équation, en attribuant à l'avance pour coefficient à l'un des termes en particulier une fonction de λ ou une constante arbitrairement choisies, par exemple en divisant tous les termes par le coefficient de l'un deux, de manière à donner à ce terme pour coefficient l'unité;



2° Cela fait, disposer ensuite arbitrairement d'un seul des nouveaux coefficients, en le prenant, soit pour le paramètre lui-même, soit pour une fonction déterminée de ce paramètre sans constante arbitraire (en renonçant toutefois dès lors à adopter pour paramètre le paramètre géométrique lui-même);

On voit qu'en opérant sur l'équation $A=0$, dont n désignait par hypothèse dans les raisonnements qui précèdent le nombre des termes distincts en x, y, z, les deux préparations que nous venons de dire, le nombre des inconnues se trouvera réduit à $n-2$. Si donc l'élimination des dérivées secondes, ainsi que nous l'avons expliqué, a procuré un nombre au moins égal à $n-2$ d'équations du premier ordre, et que l'introduction dans ces équations des hypothèses que nous venons de dire n'en fasse disparaître aucune, ces $n-2$ équations du premier ordre formeront encore un système complet, permettant de déterminer ces inconnues avec un nombre $n-2$ de constantes arbitraires, lequel sera par conséquent dans ce cas le nombre maximùm de celles qui pourront entrer dans la solution la plus générale.

Les mêmes considérations font voir encore que, même pour le cas général, c'est-à-dire celui où l'élimination des dérivées secondes fournira de prime abord un nombre d'équations du premier ordre précisément égal à n, ce nombre n, admis tout à l'heure comme maximum pour les constantes arbitraires de la solution la plus générale, pourra encore être réduit de deux unités, en supposant que l'on ait effectué au préalable, sur l'équation $A=0$, les deux préparations indiquées tout à l'heure; et, comme le nombre des inconnues, ou des coefficients à déterminer, ne saurait être réduit davantage sans préjuger, et par conséquent risquer d'altérer, la forme de la solution, il est clair que, dans cette dernière hypothèse, les $n-2$ constantes d'intégration, introduites par notre méthode dans la solution la plus générale, seront alors relativement à cette solution des constantes *essentielles*, c'est-à-dire que leur nombre pourra bien être augmenté (*),

(*) Il est bien clair, en effet, que si, pour un problème particulier, l'on suppose obtenue dans ces conditions par notre méthode une solution renfermant n constantes, et que l'on

mais ne saurait être diminué par aucun changement ultérieur du paramètre.

Si, au contraire, l'on n'a pas eu préalablement cette attention, et que l'on ait conservé dans l'équation $A = 0$ un coefficient indéterminé pour chaque terme, le nombre des constantes introduites par l'intégration sera bien encore, en général, égal à n, ainsi que nous l'avons expliqué, n étant toujours le nombre des inconnues ou des coefficients à déterminer; seulement il est clair que, dans ce cas, au nombre de ces constantes, il y en aura deux qui seront ***surabondantes*** ou non essentielles, puisqu'en partant de la forme équivalente de l'équation $A = 0$, réduite comme nous l'avons expliqué, l'on eût trouvé alors deux constantes de moins dans la solution la plus générale du problème (*).

---

y remplace ensuite λ par $f(\lambda)$, $f(\lambda)$ désignant, par exemple, un polynome entier de degré m à coefficients indéterminés, la solution, sous cette nouvelle forme, contiendra alors en apparence $n+m+1$ constantes arbitraires. Il y aura donc alors, entre les deux groupes de constantes, successivement introduits dans la solution, une distinction fondamentale à établir, distinction que nous exprimerons en attribuant aux premières la dénomination d'*essentielles*, et aux secondes celles de *surabondantes*.

(*) Ainsi, par exemple, pour les plans et les surfaces à centre du second ordre, l'on n'obtiendra dans la solution que des constantes essentielles, en partant pour l'équation $A = 0$, au lieu des deux types symétriques qui se présentent les premiers à l'esprit

$$(\alpha) \qquad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K,$$

de deux formes d'équation telles que

$$(6) \qquad ax + by + z = \lambda, \qquad \frac{x^2}{\lambda} + by^2 + cz^2 = 1.$$

a, b, c désignant encore des fonctions indéterminées du paramètre λ.

Mais le faible avantage qu'offrent ainsi les formes analogues à (6), d'une complète parité entre toutes les constantes d'intégration, est largement compensé par deux sérieux inconvénients, correspondant à l'une et à l'autre des deux conditions sus-énoncées : le premier, de présupposer d'une façon ferme dans la solution l'existence des termes ainsi particularisés, et par conséquent d'exclure à l'avance, quand bien même elles existeraient en réalité, les solutions particulières pour lesquelles ces termes feraient défaut (pour les exemples précités (α), d'une part les plans parallèles à l'axe des z et ceux menés par l'origine, et d'autre part les cylindres parallèles à l'axe des x et les cônes du second ordre ayant pour sommet l'origine); et le second de rompre la symétrie entre les trois coordonnées, qui est une condition *sine qua non* du succès de nos calculs. Aussi nous en tiendrons-nous, le plus souvent, à l'équation primitive analogue à (α) malgré le léger défaut de pure forme inhérent à la solution à laquelle elle conduira, et sur lequel il suffit évidemment d'avoir appelé l'attention du Lecteur, pour qu'il ne présente plus dès lors aucune espèce d'inconvénient.

Nous vérifierons successivement chacune de ces prévisions, sur les différents exemples d'application de cette méthode que nous nous proposons de traiter, à l'occasion de plusieurs questions importantes relatives au problème de l'isothermie.

Le seul cas, dans lequel la conclusion ci-dessus relative au nombre des constantes arbitraires fera réellement défaut, sera donc celui où, même en tenant compte des considérations qui précèdent, l'élimination de toutes les dérivées secondes entre les N équations primitivement posées ne fournirait qu'un nombre $n - k$ d'équations distinctes du premier ordre, moindre que celui des inconnues à déterminer, et dans lequel par conséquent il faudrait nécessairement leur adjoindre k de ces équations primitives du second ordre pour compléter le système propre à leur détermination. Or, comme il sera évidemment possible, en revenant dans ce cas aux n équations primitives distinctes qui auront déjà servi à l'élimination des dérivées secondes entre les N équations posées, d'éliminer entre elles seules $n - k$ des dérivées secondes, si l'on prend alors précisément les k équations ainsi obtenues pour les adjoindre, ainsi que nous venons de le dire, aux $n - k$ équations du premier ordre résultant de la première élimination, l'on voit que les n inconnues seront alors déterminées par un système différentiel de n équations, contenant, avec les n dérivées premières, k seulement des dérivées secondes, et qui par conséquent, étant ramené à la forme normale, sera de l'ordre $n + k$: d'où il suit que, pour ce cas exceptionnel, dont nous fournirons également un exemple, l'ensemble des expressions les plus générales des inconnues contiendra précisément ce même nombre $n + k$ de constantes arbitraires

Ce nombre $n + k$ sera donc en même temps, dans ce cas, le nombre maximum des constantes essentielles qui pourront entrer dans la solution la plus générale, si l'on suppose, encore comme plus haut, que l'on ait accompli au préalable sur l'équation proposée $A = 0$ les deux préparations que nous avons indiquées (pp. 64 et 65); sinon, parmi ces $n + k$ constantes, il s'en trouvera encore une ou deux qui seront surabondantes, suivant que l'on aura négligé de remplir l'une seulement, ou les deux à la fois, des deux conditions sus-énoncées.

Notons enfin, avant d'aller plus loin, que jusqu'ici, sauf en quelques points secondaires, aucune des considérations qui précèdent ne vise exclusivement le problème spécial à l'occasion duquel nous avons été amené à les présenter, c'est-à-dire la forme particulière de notre équation générale (53) qui résulte directement de celle de l'équation proposée (29), en sorte que la même méthode pourrait être appliquée sans doute, avec le même succès, à la recherche des solutions algébriques, de forme déterminée, de toute autre équation aux dérivées partielles du second ordre, à trois variables indépendantes.

La théorie, que nous venons d'exposer, laisse complètement arbitraire le choix du paramètre géométrique λ, c'est-à-dire son expression en fonction du paramètre thermométrique θ, ou, ce qui revient au même, le choix de la fonction $T = -\Psi(\lambda)$ définie par l'équation (52), qui détermine précisément cette expression par le moyen des équations (32) ou (32bis). En général, c'est-à-dire sauf le seul cas où l'on prendrait $\lambda = \theta$ ou $T = 0$, les constantes arbitraires essentielles, dont le nombre maximum est fixé par cette théorie, existeront donc dans la solution, *en sus* ou *indépendamment* de celles qui entreront dans cette dernière expression de λ que nous venons de dire, et qui seront évidemment des constantes surabondantes, à savoir : soit celles qui pourront y être introduites à volonté dans chaque cas par la fonction $T = -\Psi(\lambda)$, puisqu'elle est complètement arbitraire (*), soit simplement les deux constantes de définition σ et τ du paramètre thermométrique (**), lesquelles en tout état de cause y figureront en vertu de l'équation (32bis), et cela toujours de la même manière, c'est-à-dire de telle sorte que le paramètre θ n'intervienne dans cette expression que par la fonction linéaire $u = \sigma\theta + \tau$.

Dans le cas unique, au contraire, où l'on aura adopté de prime abord le paramètre thermométrique θ pour variable indépendante

(*) Voir la note antérieure de la page 65.

(**) Car, on les fera disparaître de la solution, d'après ce que nous allons dire à l'instant, en prenant simplement pour paramètre, à la place de θ, la fonction linéaire $u = \sigma\theta + \tau$.

[ou fait T = 0 dans l'équation générale (53)], il est bien clair qu'au nombre des constantes d'intégration introduites par notre méthode, se trouveront alors comprises les deux constantes précitées σ et τ, lesquelles accompagneront forcément, de la manière que nous venons de dire, le paramètre thermométrique θ, puisque le résultat ainsi obtenu directement devra être évidemment le même que si l'on eût résolu la question, en appliquant d'abord notre méthode à la même équation $\Lambda = 0$ avec un paramètre géométrique quelconque, puis rapportant ensuite la famille de surfaces à son paramètre thermométrique à l'aide du procédé de Lamé. C'est bien effectivement ce que nous aurons encore l'occasion de constater à propos d'un exemple important.

Disons enfin, en terminant cet exposé général, pour répondre à une objection qui se présentera certainement à l'esprit du Lecteur, que la multiplicité des équations que l'on sera amené à considérer par cette méthode, bien que peu encourageante assurément de prime abord, ne constituera pas cependant un obstacle irréductible à son succès, si l'on a soin de faire usage dans cette question d'une notation symétrique et compréhensive, qui permette d'englober un grand nombre d'équations d'un même type sous une formule unique. Nous fournissons une preuve indéniable de cette assertion dans la Note I de l'Appendice qui termine ce Mémoire, dans laquelle nous appliquons pas à pas notre méthode à l'équation la plus générale du second degré, pour laquelle le nombre des coefficients inconnus étant de *dix*, celui des équations à vérifier est de *trente-cinq*.

Application de la méthode au plan, et a la sphère. — Appliquons donc cette méthode, à titre d'exemple, aux trois classes de surfaces les plus simples et le plus fréquemment considérées, à savoir les plans, les sphères, et les surfaces du second ordre en général, ainsi qu'à un type simple emprunté à la catégorie des équations de degré supérieur.

1° (*Plans*). — Faisant pour ce cas, ainsi que nous avons dit,

$$\Lambda = Ax + By + Cz + D, \qquad (53^{bis})$$

les coefficients A, B, C, D, de l'équation $\Lambda = 0$, étant supposés des fonctions actuellement indéterminées du paramètre, nous en déduirons, en introduisant pour simplifier les écritures l'inconnue auxiliaire $S = A^2 + B^2 + C^2$,

$$
(54)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Lambda' = A'x + B'y + C'z + D', \qquad \Lambda'' = A''x + B''y + C''z + D'', \\
&\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z}\right)^2 = S, \qquad \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} = 0, \\
&\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\frac{\partial \Lambda'}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\frac{\partial \Lambda'}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda}{\partial z}\frac{\partial \Lambda'}{\partial z} = AA' + BB' + CC' = \tfrac{1}{2} S',
\end{aligned}
\right.
$$

et par suite, en substituant ces valeurs dans notre équation générale (53), celle-ci sera dès lors pour ce cas

$$
-(A'x + B'y + C'z + D')S' + \left[(A'' + TA')x + (B'' + TB')y + (C'' + TC')z + D'' + TD'\right]S = 0.
$$

Nos quatre inconnues A, B, C, D seront alors déterminées par la condition de vérifier les quatre équations du second ordre

$$
(55)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-A'S' + (A'' + TA')S = 0, \qquad -B'S' + (B'' + TB')S = 0, \\
&-C'S' + (C'' + TC')S = 0, \qquad -D'S' + (D'' + TD')S = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

lesquelles pourront encore être écrites sous forme de rapports égaux

$$
\frac{A'' + TA'}{A'} = \frac{B'' + TB'}{B'} = \frac{C'' + TC'}{C'} = \frac{D'' + TD'}{D'} = \frac{S'}{S},
$$

ou plus simplement, en éliminant des trois premières de ces équations la fonction arbitraire T,

$$
(56)\qquad \frac{A''}{A'} = \frac{B''}{B'} = \frac{C''}{C'} = \frac{D''}{D'} = \frac{S'}{S} - T;
$$

par où l'on voit déjà qu'après avoir disposé arbitrairement de cette fonction T, ou ce qui revient au même, choisi à volonté le paramètre géométrique λ en fonction du paramètre thermomé-

trique θ, la solution la plus générale du problème envisagé devra renfermer huit constantes arbitraires (*).

Cela posé, si l'on ne s'impose pas tout d'abord la condition que la famille de surfaces soit rapportée à son paramètre thermométrique, le mode le plus simple d'intégrer le système précédent (56) sera évidemment de prendre pour la fonction arbitraire T la valeur $T = \frac{S'}{S}$, auquel cas le dit système se réduira par là à celui-ci

$$A'' = 0, \qquad B'' = 0, \qquad C'' = 0, \qquad D'' = 0,$$

lequel n'admet manifestement d'autre solution que son intégrale générale, savoir

(56bis) $$A = \alpha\lambda - a, \quad B = \beta\lambda - b, \quad C = \gamma\lambda - c, \quad D = \delta\lambda - d,$$

en sorte qu'en reportant ces valeurs dans l'expression proposée (53bis) de A, l'on voit que toutes les familles isothermes de plans sans exception seront comprises dans l'équation

(57) $$(\alpha\lambda - a)x + (\beta\lambda - b)y + (\gamma\lambda - c)z + \delta\lambda - d = 0,$$

ou

(58) $$\lambda = \frac{ax + by + cz + d}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}.$$

De cette forme générale d'équation ressort immédiatement une conséquence géométrique importante, à savoir que tous les plans qui composent une famille isotherme passent toujours par une même droite, qui est l'intersection des deux plans

(59) $$ax + by + cz + d = 0, \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

lesquels font eux-mêmes partie de la famille pour les valeurs du

(*) Ce premier résultat déjà est parfaitement conforme aux prévisions formulées par notre théorie, car le nombre N des équations du second ordre (55) étant ici égal au nombre n des inconnues, le nombre $n - k$ des équations du premier ordre qu'il est possible de former par l'élimination des dérivées secondes est dès lors égal à zéro. On a donc dans le cas actuel $k = n = 4$, et par conséquent le nombre des constantes arbitraires que contiendra l'expression la plus générale des inconnues sera $n + k = 2.4 = 8$ (p. 67).

paramètre $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Dans le cas d'une famille de plans parallèles, on devra considérer que cette droite s'est transportée tout entière à l'infini avec l'un de ces plans, car la distance du second plan à l'origine grandit infiniment, lorsque dans l'expression (58) l'on fait tendre α, 6, γ, simultanément vers zéro, en laissant d'ailleurs arbitraires leurs rapports mutuels, c'est-à dire, par conséquent, quelle que soit l'orientation de ce second plan.

Cette propriété caractéristique, si nette et si simple, nous sera d'un très grand secours dans le chapitre suivant, pour la détermination des systèmes orthogonaux isothermes, dans lesquels on suppose *a priori* qu'il existe une famille de plans.

Si l'on tient, au contraire, à obtenir comme résultat du calcul la même famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, il faudra, d'après la définition (52) de la fonction T, faire dans les équations (55) ou (56), $T = 0$, auquel cas elles deviendront

$$\frac{A''}{A'} = \frac{B''}{B'} = \frac{C''}{C'} = \frac{D''}{D'} = \frac{S'}{S} = \frac{\rho''}{\rho'},$$

en introduisant pour la symétrie une seconde inconnue auxiliaire ρ, qui sera dès lors, comme A, B, C, D, une fonction déterminée du paramètre thermométrique θ. Nous aurons donc à présent, en intégrant toutes ces équations une première fois,

$$(60) \qquad A' = \alpha\rho', \quad B' = 6\rho', \quad C' = \gamma\rho', \quad D' = \delta\rho', \quad S = \sigma\rho',$$

puis une seconde fois, sauf la dernière,

$$(61) \qquad A = \alpha\rho - a, \quad B = 6\rho - b, \quad C = \gamma\rho - c, \quad D = \delta\rho - d;$$

et enfin, en remettant ces valeurs de A, B, C, D dans la dernière des cinq équations que nous venons d'écrire, après y avoir remplacé l'inconnue auxiliaire S par sa valeur de définition (54), la dernière inconnue ρ sera alors déterminée en fonction du paramètre θ au moyen d'une équation intégrable par quadrature, qui nous reste seule désormais à calculer.

Pour effectuer cette dernière détermination, écrivant, au moyen

des valeurs (61) de A, B, C, D, celle (54) de S ainsi qu'il suit

$$(62)\qquad S = (\alpha\rho - a)^2 + (6\rho - b)^2 + (\gamma\rho - c)^2 = P\rho^2 - 2Q\rho + R,$$

P, Q, R désignant pour abréger les trois quantités constantes

$$(63)\qquad P = \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2, \quad Q = \alpha a + 6b + \gamma c, \quad R = a^2 + b^2 + c^2,$$

lesquelles donnent suivant une formule connue

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} PR - Q^2 &= (\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (\alpha a + 6b + \gamma c)^2 \\ &= (6c - \gamma b)^2 + (\gamma a - \alpha c)^2 + (\alpha b - 6a)^2, \end{aligned} \right.$$

puis, mettant cette dernière expression (62) de S sous forme d'une somme de deux carrés, qui seront tous les deux positifs, en vertu de la valeur qui précède, savoir

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} S = \frac{1}{P}(P\rho^2 - 2PQ\rho + PR) &= \frac{1}{P}\left[(P\rho - Q)^2 + PR - Q^2\right] \\ &= \frac{PR - Q^2}{P}\left[\left(\frac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right)^2 + 1\right], \end{aligned} \right.$$

et enfin reportant, comme nous l'avons dit, cette valeur dans la dernière équation (60), nous obtiendrons, pour déterminer l'inconnue auxiliaire ρ, l'équation

$$\frac{PR - Q^2}{P}\left[1 + \left(\frac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right)^2\right] = \sigma\rho',$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{PR - Q^2}}{\sigma} = \frac{\dfrac{P}{\sqrt{PR - Q^2}}\dfrac{d\rho}{d\theta}}{1 + \left(\dfrac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right)^2}.$$

Mais cette équation, dans laquelle figure la constante arbitraire σ, étant désormais la seule que nous ayons à considérer, le premier membre est une constante arbitraire indépendante, que nous pourrons par conséquent tout aussi bien désigner simplement

par σ, et dès lors cette équation devenant ainsi, en séparant les variables,

$$\sigma d\theta = \frac{\frac{\mathrm{P}d\rho}{\sqrt{\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2}}}{1+\left(\frac{\mathrm{P}\rho-\mathrm{Q}}{\sqrt{\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2}}\right)^2},$$

donnera en intégrant

$$(66)\qquad \sigma\theta+\tau = \text{arc tg}\left(\frac{\mathrm{P}\rho-\mathrm{Q}}{\sqrt{\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2}}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{P}\rho-\mathrm{Q}}{\sqrt{\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2}} = \text{tang}(\sigma\theta+\tau),$$

et enfin, en résolvant par rapport à ρ,

$$(67)\qquad \rho = \frac{1}{\mathrm{P}}\left[\mathrm{Q}+\sqrt{\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2}\,\text{tang}\,(\sigma\theta+\tau)\right],$$

valeur qui est bien réelle, eu égard à la seconde valeur (64), et qu'il n'y aura plus qu'à substituer dans les expressions (61), pour avoir celle des coefficients de la famille de plans rapportée à son paramètre thermométrique.

Le rapprochement des formules (56bis) et (61), trouvées successivement pour ces deux hypothèses, fait voir d'ailleurs que le paramètre géométrique λ correspondant à la première forme (57), considéré comme fonction de θ, n'est autre que cette dernière fonction ρ (67), dont nous venons précisément de déterminer l'expression.

Le résultat, auquel nous venons de parvenir, est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable, que l'on apercevra en spécifiant le choix des axes coordonnés, et prenant pour axe des z la droite fixe intersection des deux plans (59), par laquelle passent tous les plans de la famille considérée.

En effet, si l'on prend, dans cette hypothèse, pour plan des yz le second plan (59), auquel cas le numérateur et le dénominateur de l'expression (58) de λ se transformeront alors respectivement dans les suivants

$$ax+by+cz+d = \mathrm{L}x'+\mathrm{M}y', \qquad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = \mathrm{N}x',$$

on voit que pour appliquer à l'équation générale de la famille isotherme de plans (58), qui sera devenue par cette transformation

$$(68) \qquad \lambda = \frac{Lx' + My'}{Nx'} = \frac{L}{N} + \frac{M}{N}\frac{y'}{x'},$$

les formules de la théorie qui précède, il faudra faire à la fois dans ces formules

$$a = L,\ b = M,\ c = 0,\ d = 0;\quad \alpha = N,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0;$$

et par suite aussi, d'après les définitions (63),

$$\left\{ \begin{array}{l} P = N^2, \qquad Q = NL, \qquad R = L^2 + M^2, \\ PR - Q^2 = N^2(L^2 + M^2) - N^2L^2 = N^2M^2. \end{array} \right.$$

L'expression (67) de ρ, à laquelle nous sommes arrivés tout à l'heure, deviendra donc avec ce choix des axes,

$$(68^{bis}) \qquad \rho = \frac{1}{N^2}\left[NL + NM \operatorname{tang}(\sigma\theta + \tau)\right] = \frac{L}{N} + \frac{M}{N}\operatorname{tang}(\sigma\theta + \tau),$$

et comme cette fonction ρ (67) se confond, ainsi que nous l'avons remarqué, avec le paramètre λ de la forme d'équation (58), nous trouverons par suite, en effaçant maintenant les accents, par la simple comparaison des valeurs égales (68) et (68bis), pour l'équation de la même famille de plans rapportée à son paramètre thermométrique, dans la nouvelle hypothèse,

$$(69) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(\sigma\theta + \tau),$$

équation qui pourra représenter dès lors, aussi bien que la première forme (57) ou (58), toutes les familles isothermes de plans sans exception, et qui montre en outre que le paramètre thermométrique, relatif à chaque plan d'une semblable famille, n'est autre que l'azimut de ce plan par rapport à un certain plan de la même famille, pris pour origine.

A la vérité, d'une part, ce dernier type d'équation (69), qui

n'est autre que la première solution particulière (44) relative à la catégorie des cônes, avait bien été déjà signalé par Lamé, comme définissant une famille isotherme, et, d'autre part, notre type général (58) pouvant inversement être déduit de celui-ci rien qu'en y effectuant un simple changement de coordonnées rectilignes, la direction des nouveaux axes demeurant cette fois arbitraire, et y faisant en même temps $\lambda = \text{tang}\,(\sigma\theta + \tau)$, le procédé de Lamé exposé plus haut (pp. 35-37) permettrait ensuite d'arriver sans peine à la relation, entre les deux paramètres (géométrique et thermométrique) de la famille de surfaces, que nous avons trouvée ci-dessus. Mais il faut bien faire attention que ce procédé de Lamé, excellent pour vérifier l'isothermie de la famille de surfaces ainsi donnée, et pour découvrir la relation que nous venons de dire (*), n'eût renseigné en rien sur la forme de la solution la plus générale, forme que l'on eût pu croire dès lors beaucoup plus compliquée, ni sur le nombre des constantes qu'elle devait renfermer. Ainsi, par exemple, une présomption, fondée sur l'analogie avec la forme que nous avons annoncé déjà devoir trouver pour la solution la plus générale relative au second degré, mais non justifiée par l'événement, eût sans doute amené à penser que pour le premier degré cette solution générale devrait être la suivante

$$\frac{x}{a+\lambda} + \frac{y}{b+\lambda} + \frac{z}{c+\lambda} = h,$$

avec laquelle, les coefficients étant alors des fonctions du deuxième et du troisième degré en λ, aucune propriété caractéristique analogue à celle que nous avons signalée n'eût alors existé.

En supposant donc que l'on fût arrivé à l'aide de la seule transformation des coordonnées, comme nous venons de le dire, à la forme d'équation (57), aucune indication, en dehors de la

(*) Nous effectuerons ce calcul à la fin du Chapitre, en même temps que deux autres analogues, comme confirmation des résultats obtenus par notre méthode, avant de les formuler en théorèmes que nous aurons fréquemment l'occasion d'invoquer dans le cours de cette Étude.

méthode que nous avons proposée, n'eût permis de croire que l'on n'eût obtenu ainsi la solution la plus générale de la question, et dispensé par conséquent de rechercher d'autres types que la forme (58) pour l'expression du paramètre λ.

Aussi Lamé n'indique-t-il, à titre de famille isotherme de plans, les deux solutions ci-dessus (69) ou (44), et (49), (dont la seconde est manifestement un cas limite de la première), qu'incidemment (*), et comme faisant partie de systèmes orthogonaux triplement isothermes dont il s'occupe, et non pas dans l'énumération et l'examen successif qu'il fait, au début de sa théorie, des différentes familles isothermes de surfaces (**). Mais il ne signale nulle part l'équation (57) comme étant la forme la plus générale de la solution pour les familles de plans, ni à plus forte raison l'équation (69) comme représentant l'expression la plus générale du paramètre thermométrique, ainsi que nous venons de le faire, expression que son procédé ne lui permettait d'obtenir qu'en supposant la forme de la solution la plus générale préalablement connue. Ce premier exemple, si simple qu'il soit, témoigne donc déjà d'une façon irrécusable de l'utilité de la méthode, qu'après celle due à Lamé, nous avons proposée pour aborder le problème de l'isothermie.

II° (*Sphères*). — Pour ce second exemple, sachant que dans tous les cas l'équation de la surface contiendra un terme en $(x^2 + y^2 + z^2)$ qui comprendra l'ensemble des termes du second degré, nous donnerons $-\frac{1}{2}$ pour coefficient à ce terme, et faisant alors

$$\Lambda = Ax + By + Cz + D - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

l'équation $\Lambda = 0$ sera évidemment l'équation la plus générale

(*) Lamé, *Leçons sur les Coord. Curv.*, § XXXII-XXXIII (pages 52-54), et § XCIX (page 179).

(**) Lamé, *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc., §§ III, VI-X et XIII (pages 4, 6-13 et 17-18). Les différentes familles de surfaces qu'il passe ainsi en revue dans ces pages sont au reste toutes du second ordre, et ne sont que des cas particuliers, ou des cas-limites, de la solution remarquable découverte par lui et formulée en dernier lieu, à savoir celle des familles de surfaces homofocales.

d'une famille de sphères. Or, cette expression de A donnant

$$(70)\left\{\begin{aligned}
&\mathsf{A}' = A'x + B'y + C'z + D', \qquad \mathsf{A}'' = A''x + B''y + C''z + D'',\\
&\frac{\partial\mathsf{A}}{\partial x}\frac{\partial\mathsf{A}'}{\partial x} + \frac{\partial\mathsf{A}}{\partial y}\frac{\partial\mathsf{A}'}{\partial y} + \frac{\partial\mathsf{A}}{\partial z}\frac{\partial\mathsf{A}'}{\partial z} = (A - x)A' + (B - y)B' + (C - z)C'\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = AA' + BB' + CC' + D' - \mathsf{A}',\\
&\left(\frac{\partial\mathsf{A}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathsf{A}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathsf{A}}{\partial z}\right)^2 = (A - x)^2 + (B - y)^2 + (C - z)^2\\
&= A^2 + B^2 + C^2 - 2\left[Ax + By + Cz - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = A^2 + B^2 + C^2 + 2D - 2\mathsf{A},\\
&\frac{\partial^2\mathsf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathsf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathsf{A}}{\partial z^2} = -3,
\end{aligned}\right.$$

si nous convenons encore cette fois de prendre le paramètre thermométrique θ pour variable indépendante, ce qui équivaudra à faire de nouveau la fonction arbitraire $T = 0$, et si nous tenons compte en même temps de l'équation proposée $\mathsf{A} = 0$, en vue d'éliminer le terme en $(x^2 + y^2 + z^2)$, auquel nous avons attribué à l'avance un coefficient déterminé (et qui ne doit pas dès lors intervenir dans les conditions qui déterminent les coefficients des autres termes), notre équation générale (53) sera dans le cas actuel

$$-3\mathsf{A}'^2 - 2\mathsf{A}'(AA' + BB' + CC' + D' - \mathsf{A}') + \mathsf{A}''(A^2 + B^2 + C^2 + 2D) = 0,$$

ou simplement, en réduisant, et remplaçant A' et A'' par leurs valeurs (70),

$$\begin{aligned}-(A'x + B'y + C'z + D')^2 - 2(A'x + B'y + C'z + D')(AA' + BB' + CC' + D')&\\ + (A''x + B''y + C''z + D'')(A^2 + B^2 + C^2 + 2D) = 0.&\end{aligned}$$

Or, tous les termes du second degré, en x, y, z, qui proviennent tous du seul premier terme A'^2, devant disparaître séparément, il sera nécessaire que l'on ait tout d'abord

$$(71)\qquad A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0, \quad \text{ou} \quad A = a, \quad B = b, \quad C = c,$$

ce qui réduira dès lors la même équation à la suivante

$$-D'^2 - 2D'^2 + D''(a^2 + b^2 + c^2 + 2D) = 0,$$

ou plus simplement celle-ci

(72) $$-3D'^2 + D''(l^2 + 2D) = 0,$$

en représentant, pour abréger, par l^2 la constante

(73) $$l^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

et dès lors cette même équation, étant intégrée deux fois, nous fournira l'expression du dernier coefficient D en fonction de θ.

Cela posé, si l'on ne tient pas tout d'abord à ce que la famille de surfaces soit rapportée à son paramètre thermométrique, on pourra prendre pour paramètre géométrique $\lambda = l^2 + 2D$, D étant précisément la fonction qui résulterait de l'intégration de l'équation du second ordre (72), et alors, comme d'une part l'équation $\Lambda = 0$ pourra évidemment s'écrire avec cette hypothèse, et en tenant compte de la valeur de définition (73) de l^2,

(74) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \lambda,$$

et comme d'autre part les trois équations (71), qui déterminent dans le cas actuel les trois coefficients A, B, C, n'admettent encore évidemment pas d'autre solution que celle que nous avons adoptée, il s'ensuit dès lors que cette dernière équation représente certainement de nouveau toutes les solutions possibles du problème, et que, par conséquent, toute famille isotherme de sphères se compose exclusivement de sphères concentriques.

Cette première conclusion nous sera également très utile dans le Chapitre suivant pour la recherche qui fait l'objet de ce Mémoire.

En second lieu, si l'on désire au contraire résoudre complètement la question dans les termes mêmes où nous l'avions posée tout d'abord, c'est-à-dire obtenir comme solution la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, l'équation (72) étant écrite, en la divisant par $D'(l^2 + 2D)$,

$$-\frac{3}{2}\frac{2D'}{l^2 + 2D} + \frac{D''}{D'} = 0,$$

donnera, en intégrant une première fois par quadrature,

$$-\frac{3}{2}\log(l^2 + 2D) + \log D' = \log(-\sigma),$$

ou, en repassant aux nombres, et changeant ensuite les signes des deux membres,

$$-D'(l^2 + 2D)^{-\frac{3}{2}} = \sigma,$$

et enfin en intégrant une seconde fois par quadrature

$$(l^2 + 2D)^{-\frac{1}{2}} = \sigma\theta + \tau \qquad \text{ou} \qquad l^2 + 2D = \frac{1}{(\sigma\theta + \tau)^2}.$$

Et par conséquent, en reportant cette valeur, à la place de λ, au second membre de l'équation (74) dans lequel nous avions fait par hypothèse $\lambda = l^2 + 2D$, cette même équation (74) deviendra définitivement sous la forme demandée

$$(75) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \frac{1}{(\sigma\theta + \tau)^2},$$

laquelle montre à son tour que le paramètre thermométrique $\sigma\theta + \tau$ est simplement, pour chaque surface de la famille, l'inverse du rayon : résultat que fournirait à la vérité le procédé de Lamé, appliqué à l'équation (74), ainsi que nous le vérifierons à la fin de ce Chapitre, mais à la condition d'être parvenu préalablement à cette même forme, pour la découverte de laquelle cette méthode ne procure aucune indication, et laisse de nouveau par conséquent, même dans ce cas si simple, la solution véritable du problème de l'isothermie complètement indécise.

Application de la méthode aux surfaces du second ordre, et a un type d'ordre supérieur. — III° (*Surfaces du second ordre en général*). — Pour ce troisième exemple plus compliqué, en vue d'arriver plus facilement et plus rapidement au but, nous diviserons la question, et nous envisagerons tout d'abord un cas particulier seulement du problème, en astreignant à l'avance toutes les surfaces composant la famille à deux conditions spé-



ciales, qui pourront fort bien ne pas se trouver remplies dans le cas général, à savoir : 1° d'avoir toutes un centre qui soit le même pour toutes les surfaces, et que l'on pourra prendre dès lors pour origine des coordonnées ; 2° d'avoir également toutes les mêmes plans principaux, que nous adopterons semblablement pour plans coordonnés, en sorte que pour ce cas, en représentant toujours par $\Lambda = 0$ l'équation de la famille en question, nous aurons alors pour la fonction Λ une expression de la forme

$$(76) \qquad \Lambda = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - H, \text{(*)}$$

les coefficients A, B, C, H étant des fonctions du paramètre, qu'il s'agit de déterminer par la condition que la famille de surfaces $\Lambda = 0$ soit isotherme.

Pour cela, tirant successivement de la valeur qui précède

$$(77) \left\{ \begin{array}{l} \Lambda' = A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - H', \qquad \Lambda'' = A''x^2 + B''y^2 + C''z^2 - H'', \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial y}\dfrac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial z}\dfrac{\partial\Lambda'}{\partial z} = 4\,(AA'x^2 + BB'y^2 + CC'z^2), \\ \left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2 = 4\,(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2), \\ \dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2} = 2\,(A + B + C), \end{array} \right.$$

et reportant ces valeurs dans l'équation générale (53), celle-ci sera dans la question actuelle

$$(78) \left\{ \begin{array}{l} (A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - H')^2 . 2(A+B+C) - 2\Lambda' . 4(AA'x^2 + BB'y^2 + CC'z^2) \\ \qquad\qquad + (\Lambda'' + T\Lambda') . 4(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = 0, \end{array} \right.$$

équation dont le terme indépendant de x, y, z peut être écrit dès

---

(*) Nous écrivons H pour terme constant et non pas 1, comme on le fait généralement, afin de pouvoir comprendre éventuellement dans notre résultat la variété du cône qu nous échapperait avec l'autre hypothèse. La valeur que nous rencontrerons pour ce coefficient H nous sera d'ailleurs utile à un autre point de vue un peu plus loin.

maintenant, et fournira tout d'abord, étant égalé à zéro, la première condition

$$-H'^2 . 2(A+B+C)=0,$$

à laquelle on ne pourra satisfaire qu'en faisant, soit $H'=0$, soit $A+B+C=0$. Or, le second de ces deux modes de solution, établissant *a priori* entre les coefficients une relation indépendante du paramètre, constitue évidemment par là même une restriction de la forme d'équation primitivement proposée, et ne saurait appartenir dès lors à la solution la plus générale du problème envisagé.

Le premier mode de solution, au contraire, savoir

$$(79) \qquad H'=0, \qquad \text{ou} \qquad H=h,$$

h étant une constante arbitraire, n'introduit aucune restriction, du moment que l'on peut toujours, comme nous l'avons remarqué, attribuer à l'un des termes en particulier un coefficient arbitrairement choisi; c'est donc cette solution qu'il nous faut adopter.

Cela posé, les expressions ci-dessus (77) de Λ' et Λ'' se réduisant, par ce premier résultat, aux suivantes

$$(80) \qquad \Lambda'=A'x^2+B'y^2+C'z^2, \qquad \Lambda''=A''x^2+B''y^2+C''z^2,$$

si nous convenons encore, comme pour l'exemple précédent, d'adopter pour paramètre le paramètre thermométrique lui-même, l'introduction de la valeur précédente (79) de H', ainsi que de l'hypothèse $T=0$ dans l'équation primitivement posée (78), la transformera dans la suivante

$$(A'x^2+B'y^2+C'z^2)^2 . 2\ A+B+C)-2\Lambda' . 4(AA'x^2+BB'x^2+CC'z^2)$$
$$+\Lambda'' . 4(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)=0,$$

ou, en divisant par 2, puis remplaçant alors Λ' et Λ'' par leurs nouvelles valeurs (80), et faisant en même temps, pour simplifier l'écriture $A+B+C=S$,

$$(A'x^2+B'y^2+C'z^2)\left[(A'x^2+B'y^2+C'z^2)S-4(AA'x^2+BB'y^2+CC'z^2)\right]$$
$$+(A''x^2+B''y^2+C''z^2) . 2(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)=0,$$



ou encore, en ordonnant dans l'intérieur des crochets,

$$(A'x^2+B'y^2+C'z^2)\left[(S-4A)A'x^2+(S-4B)B'y^2+(S-4C)C'z^2\right] + 2(A''x^2+B''y^2+C''z^2)(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)=0.$$

Dès lors, en effectuant les produits pour chacune des deux lignes séparément, l'on trouvera

$$\begin{aligned}&(S-4A)A'^2x^4+(S-4B)B'^2y^4+(S-4C)C'^2z^4\\&\quad+2B'C'\{S-2(B+C)\}y^2z^2+2C'A'\{S-2(C+A)\}z^2x^2\\&\qquad\qquad+2A'B'\{S-2(A+B)\}x^2y^2\\&+2\left[A''A^2x^4+B''B^2y^4+C''C^2z^4\right.\\&\left.+(B''C^2+C''B^2)y^2z^2+(C''A^2+A''C^2)z^2x^2+(A''B^2+B''A^2)x^2y^2\right]=0,\end{aligned}$$

et, en fin de compte, si l'on a égard à la valeur de définition de S, posée tout à l'heure, qui donne

$$S-2(B+C)=2A-S,\quad S-2(C+A)=2B-S,\quad S-2(A+B)=2C-S,$$

l'on obtiendra, en ordonnant le tout par rapport à x, y, z, pour notre équation générale (53) dans le problème actuel :

$$(81)\quad\left\{\begin{aligned}&\{(S-4A)A'^2+2A''A^2\}x^4+\{(S-4B)B'^2+2B''B^2\}y^4\\&\qquad+\{(S-4C)C'^2+2C''C^2\}z^4\\&+2\{(2A-S)B'C'+B''C^2+C''B^2\}y^2z^2\\&+2\{(2B-S)C'A'+C''A^2+A''C^2\}z^2x^2\\&+2\{(2C-S)A'B'+A''B^2+B''A^2\}x^2y^2=0.\end{aligned}\right.$$

Par conséquent, en vertu de la théorie que nous avons exposée, les trois coefficients A, B, C, qui nous restent seuls à déterminer, devront vérifier les six équations simultanées du second ordre :

$$(82)\quad\left\{\begin{aligned}&(S-4A)A'^2+2A''A^2=0, &&(2A-S)B'C'+B''C^2+C''B^2=0,\\&(S-4B)B'^2+2B''B^2=0, &&(2B-S)C'A'+C''A^2+A''C^2=0,\\&(S-4C)C'^2+2C''C^2=0, &&(2C-S)A'B'+A''B^2+B''A^2=0.\end{aligned}\right.$$

Or, si des trois de gauche l'on tire les valeurs

$$(83)\quad A''=\frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^2},\qquad B''=\frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^2},\qquad C''=\frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^2},$$

pour les reporter dans les trois autres du groupe de droite, l'on formera les trois équations du premier ordre seulement

$$(84)\quad \begin{cases} (2A-S)B'C'+\frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^2}.C^2+\frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^2}.B^2=0,\\ (2B-S)C'A'+\frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^2}.A^2+\frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^2}.C^2=0,\\ (2C-S)A'B'+\frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^2}.B^2+\frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^2}.A^2=0,\end{cases}$$

qui, étant divisées respectivement par B^2C^2, C^2A^2, A^2B^2, se transformeront dans les suivantes

$$\begin{cases} (2A-S)\frac{B'C'}{B^2C^2}+\frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^4}+\frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^4}=0,\\ (2B-S)\frac{C'A'}{C^2A^2}+\frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^4}+\frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^4}=0,\\ (2C-S)\frac{A'B'}{A^2B^2}+\frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^4}+\frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^4}=0,\end{cases}$$

et ne contiendront plus alors, en fait de dérivées, que celles des inverses des inconnues, attendu qu'elles pourront s'écrire, en les multipliant par 2 :

$$(85)\quad \begin{cases} (4A-2S)(B^{-1})'(C^{-1})'+(4B-S)(B^{-1})'^2+(4C-S)(C^{-1})'^2=0,\\ (4B-2S)(C^{-1})'(A^{-1})'+(4C-S)(C^{-1})'^2+(4A-S)(A^{-1})'^2=0,\\ (4C-2S)(A^{-1})'(B^{-1})'+(4A-S)(A^{-1})'^2+(4B-S)(B^{-1})'^2=0.\end{cases}$$

Sous cette nouvelle forme, on reconnaît dans ce groupe trois équations linéaires et homogènes (au point de vue *algébrique*) en A, B, C, eu égard à la définition de S, qui pourront être substituées pour la détermination des inconnues au groupe de droite des six équations (82), et qui devront nécessairement être compatibles pour qu'il existe une solution du problème : condition qui revient à dire que leur déterminant D devra être nul, du moment que le système de solution $A=0$, $B=0$, $C=0$ est évidemment inadmissible dans la question actuelle. Si donc

l'égalité ainsi posée n'est pas d'ores et déjà identiquement satisfaite, elle constituera dans ce cas une nouvelle équation du premier ordre qu'il faudra adjoindre par conséquent aux trois équations précédentes (85), qui par cette nouvelle condition se réduiront alors à deux seulement. Si, au contraire, cette même égalité $D = 0$ n'est autre chose qu'une simple identité, ce qui signifiera que ces trois mêmes équations ne sont pas distinctes, il y aura lieu de voir si elles se réduisent à deux ou à une seule, et, si l'on tient à conserver θ pour paramètre, de leur adjoindre une ou deux équations, suivant le cas, prises comme l'on voudra dans le groupe de gauche (82), en vue de compléter le système nécessaire à la détermination des trois inconnues A, B, C, puisqu'alors, avec la variable indépendante θ, ces inconnues ne pourront être déterminées à l'aide d'un système du premier ordre seulement.

Il y a donc lieu tout d'abord, soit pour compléter, soit pour préciser simplement la position de la question, de calculer effectivement le déterminant des équations précitées (85).

Si, dans ce but, après y avoir remplacé S par sa valeur de définition $A + B + C$, on les ordonne par rapport à A, B, C, le groupe en question (85) se présentera sous la forme des trois équations linéaires

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} &L_1A + M_1B + N_1C = 0,\\ &L_2A + M_2B + N_2C = 0,\\ &L_3A + M_3B + N_3C = 0,\end{aligned}\right.$$

les valeurs des divers coefficients étant les suivantes :

$$(87)\qquad \left\{\begin{aligned} &L_1 = \left[(B^{-1})' - (C^{-1})'\right]^2, && \begin{aligned}M_1 &= \left[(B^{-1})' + (C^{-1})'\right]^2 - 4(B^{-1})'^2,\\ N_1 &= \left[(C^{-1})' + (B^{-1})'\right]^2 - 4(C^{-1})'^2,\end{aligned}\\ &M_2 = \left[(C^{-1})' - (A^{-1})'\right]^2, && \begin{aligned}N_2 &= \left[(C^{-1})' + (A^{-1})'\right]^2 - 4(C^{-1})'^2,\\ L_2 &= \left[(A^{-1})' + (C^{-1})'\right]^2 - 4(A^{-1})'^2,\end{aligned}\\ &N_3 = \left[(A^{-1})' - (B^{-1})'\right]^2, && \begin{aligned}L_3 &= \left[(A^{-1})' + (B^{-1})'\right]^2 - 4(A^{-1})'^2,\\ M_3 &= \left[(B^{-1})' + (A^{-1})'\right]^2 - 4(B^{-1})'^2.\end{aligned}\end{aligned}\right.$$

Or, si nous convenons de faire, dans cette question seulement, pour faciliter l'écriture des calculs, d'abord

$$(88)\qquad \alpha=(A^{-1})', \qquad \beta=(B^{-1})', \qquad \gamma=(C^{-1})',$$

puis, cela étant admis,

$$(89)\qquad p=\beta-\gamma, \qquad q=\gamma-\alpha, \qquad r=\alpha-\beta,$$

quantités qui vérifieront dès lors identiquement la relation

$$(90)\qquad p+q+r=0,$$

nous obtiendrons très facilement, avec ces notations, à la place des expressions (87), en même temps que $L_1=p^2$, pour valeur des deux autres coefficients de la première équation (86),

$$\left\{\begin{array}{l} M_1=(\beta+\gamma)^2-4\beta^2=(\beta-\gamma)^2-4\beta(\beta-\gamma)=p^2-4\beta p, \\ N_1=(\gamma+\beta)^2-4\gamma^2=(\gamma-\beta)^2+4\gamma(\beta-\gamma)=p^2+4\gamma p, \end{array}\right.$$

en sorte, qu'en remarquant sur la forme (85) que ces trois équations se déduisent les unes des autres par la permutation des trois lettres A, B, C, qui entraîne dès lors celle des trois autres lettres α, β, γ, et par suite aussi des trois autres p, q, r, les trois équations en question (86) pourront être représentées par la forme abrégée

$$(91)\qquad p\mathfrak{P}=0, \qquad q\mathfrak{Q}=0, \qquad r\mathfrak{R}=0,$$

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, désignant de nouveau les expressions linéaires

$$(92)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}=\mathcal{L}_1A+\mathcal{M}_1B+\mathcal{N}_1C, \\ \mathfrak{Q}=\mathcal{L}_2A+\mathcal{M}_2B+\mathcal{N}_2C, \\ \mathfrak{R}=\mathcal{L}_3A+\mathcal{M}_3B+\mathcal{N}_3C, \end{array}\right.$$

dont les différents coefficients auront cette fois pour valeurs

$$(93)\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{L}_1=p, & \mathcal{M}_1=p-4\beta, & \mathcal{N}_1=p+4\gamma, \\ \mathcal{L}_2=q+4\alpha, & \mathcal{M}_2=q, & \mathcal{N}_2=q-4\gamma, \\ \mathcal{L}_3=r-4\alpha, & \mathcal{M}_3=r+4\beta, & \mathcal{N}_3=r; \end{array}\right.$$

et le déterminant D des équations (86) ou (91), qu'il s'agit de calculer, aura donc pour expression

$$(94)\qquad D = pqr\,.\,\Delta,$$

Δ étant celui des expressions précédentes (93), savoir

$$(95)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_2 \\ \mathcal{L}_3 & \mathcal{M}_3 & \mathcal{N}_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{L}_3\,(\mathcal{M}_1\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1\mathcal{M}_2) \\ & + \mathcal{M}_3\,(\mathcal{N}_1\,\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1\,\mathcal{N}_2) \\ & + \mathcal{N}_3\,(\mathcal{L}_1\,\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1\,\mathcal{L}_2). \end{aligned} \right.$$

Or, on trouvera sans peine, à l'aide de ces valeurs (93),

$$(96)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{M}_1\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1\mathcal{M}_2 = 4\mathcal{A}, \qquad \mathcal{N}_1\,\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1\,\mathcal{N}_2 = 4\mathcal{B}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{L}_1\,\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1\,\mathcal{L}_2 = 4\mathcal{C}, \end{aligned} \right.$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, désignant encore les expressions

$$(97)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} &= -\beta q + \gamma r + 4\beta\gamma, \\ \mathcal{B} &= -\gamma r + \alpha p + 4\gamma\alpha, \\ \mathcal{C} &= -\alpha p + \beta q + 4\alpha\beta, \end{aligned} \right.$$

dont nous représenterons par $\mathcal{S}$ la somme, savoir

$$(98)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} &= 4\,(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) \\ &= 4\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \end{aligned} \right.$$

et qui pourront alors être écrites plus simplement, à l'aide de cette dernière quantité,

$$(99)\qquad \mathcal{A} = \tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \beta\gamma, \qquad \mathcal{B} = \tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \gamma\alpha, \qquad \mathcal{C} = \tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \alpha\beta.$$

Cela étant admis, l'on trouvera très aisément par le moyen des valeurs (95), (96), et (93),

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\left[\mathcal{A}\mathcal{L}_3 + \mathcal{B}\mathcal{M}_3 + \mathcal{C}\mathcal{N}_3\right] \\ &= 4\left[\mathcal{A}\,(r - 4\alpha) + \mathcal{B}\,(r + 4\beta) + \mathcal{C}r\right] \\ &= 4\left[(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C})\,r - 4\alpha\mathcal{A} + 4\beta\mathcal{B}\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte alors des valeurs (98), (89), et (99),

$$(100) \qquad \Delta = 4\left[\mathcal{S}(\alpha - \beta) - 4\alpha\left(\tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \beta\gamma\right) + 4\beta\left(\tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \gamma\alpha\right)\right] = 0;$$

et par conséquent, en vertu de l'égalité (94), le déterminant D des équations (86) ou (85) qu'il s'agissait de calculer sera, lui aussi, identiquement nul.

Nous nous trouvons donc pour ce problème dans le cas d'exception signalé dans l'exposé de notre méthode générale, dans lequel les équations formées par l'élimination des dérivées secondes sont en nombre moindre que celui des inconnues, puisque l'on voit ainsi que les trois équations du premier ordre (84) ou (85), obtenues de prime abord par cette élimination, ne sont pas distinctes, et dès lors sont compatibles, sans qu'il soit nécessaire de leur adjoindre à cet effet aucune condition ou équation nouvelle; et comme par ailleurs les trois mineurs (96) du déterminant Δ ne sont pas identiquement nuls, ainsi qu'il appert des valeurs (99) et (98), il résulte en outre de ce calcul que ces mêmes équations se réduisent non pas à une seule, mais bien à deux équations distinctes.

En conséquence, d'après notre théorie générale, d'une part, si l'on renonce tout d'abord à conserver pour variable indépendante le paramètre thermométrique lui-même, en adoptant pour paramètre géométrique l'une des trois inconnues A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, ces deux équations du premier ordre suffiront alors pour déterminer les deux autres (pp. 64-65), et par conséquent il ne pourra entrer avec cette hypothèse dans les expressions les plus générales de ces inconnues plus de deux constantes essentielles. D'autre part, si l'on tient au contraire à obtenir comme résultat du calcul l'équation de la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, comme il suffira dès lors d'adjoindre à ces deux équations du premier ordre une seule équation, empruntée au groupe du second ordre conservé (82) ou (83), pour compléter le système nécessaire à la détermination de nos inconnues, d'après ce que nous avons dit, l'ensemble des expressions les plus générales des quatre inconnues A, B, C, et H devra

contenir cette fois un nombre de constantes arbitraires au plus égal à $n+1=4+1=5$ (p. 67), en y comprenant alors obligatoirement les deux constantes σ et τ du paramètre thermométrique (pp. 68-69). Dans un cas comme dans l'autre, d'ailleurs, la constante h ne sera pas, relativement à l'équation de la famille de surfaces, une constante essentielle, du moment que nous n'avons pas disposé à l'avance, ainsi que nous l'avons expliqué, de l'un des coefficients de l'équation proposée $\Lambda=0$, ou, ce qui revient au même, du moment que nous avons laissé dans l'expression (76) de Λ un coefficient indéterminé pour chaque terme (pp. 64 et 66).

Dans cette pensée, partant de ce fait que nous avons déjà remarqué, que le groupe du premier ordre en question (84) ou (85) ne contient, en fait de dérivées, que celles des inverses de A, B, C, nous adopterons dès lors pour inconnues, comme il semble naturel, ces dernières quantités à la place de A, B, C, en les introduisant également dans le groupe de gauche du second ordre (82), à l'aide de formules telles que

$$(101)\qquad (A^{-1})'=\frac{-A'}{A^2},\qquad (A^{-1})''=\left(\frac{-A'}{A^2}\right)'=\frac{-A^2A''+2AA'^2}{A^4},$$

qui permettront d'exprimer A' et A'' en fonction de A^{-1}, $(A^{-1})'$, $(A^{-1})''$, et de même pour les deux autres inconnues B et C. A cet effet, développant la première de ces équations (82) de la façon suivante

$$SA'^2-2(2AA'^2-A''A^2)=0,$$

puis la divisant par A^4, ce qui donnera

$$S\frac{A'^2}{A^4}-2\frac{2AA'^2-A^2A''}{A^4}=0,$$

nous l'écrirons, en vertu des formules précédentes (101), ainsi que les deux autres de gauche (82), sous la forme

$$(102)\quad \left\{\begin{array}{ll} S(A^{-1})'^2-2(A^{-1})''=0, & S(B^{-1})'^2-2(B^{-1})''=0, \\ & S(C^{-1})'^2-2(C^{-1})''=0. \end{array}\right.$$

Cela fait, revenons au groupe du premier ordre envisagé tout à l'heure, et considérons-le de nouveau sous la forme (91), dans laquelle chaque équation est composée de deux facteurs, différents pour chacune, savoir, p, q, r d'une part, et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ de l'autre. Partant alors de ce fait, que ces trois équations doivent se réduire à deux, nous observerons que l'on pourra satisfaire aux deux équations que l'on aura choisies pour tenir lieu de ce groupe, de trois manières différentes, savoir : ou bien, en prenant dans chacune des deux le premier facteur; ou encore, en prenant dans l'une le premier facteur, et dans l'autre le second; ou enfin, en prenant dans l'une et l'autre le second facteur. Nous allons examiner successivement, mais dans l'ordre inverse de celui où nous les avons énumérés, ces trois modes différents de solution.

1° « *Deux des trois quantités* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ *sont supposées nulles* ». — Alors la troisième le sera aussi nécessairement en vertu de l'identité $\Delta = 0$ (100), qui exprime que les trois équations $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$, $\mathfrak{R} = 0$ ne sont pas distinctes, et par conséquent l'équation restante (91) se trouvera satisfaite d'elle-même. Récrivant alors, ainsi qu'il suit, le groupe du second ordre (102)

$$(103) \qquad \frac{1}{2}S = \frac{(A^{-1})''}{(A^{-1})'^2} = \frac{(B^{-1})''}{(B^{-1})'^2} = \frac{(C^{-1})''}{(C^{-1})'^2} = \rho',$$

en introduisant pour la symétrie une inconnue auxiliaire ρ, d'une part nous obtiendrons, en intégrant les trois dernières de ces équations,

$$-\frac{1}{(A^{-1})'} = \rho - a, \qquad -\frac{1}{(B^{-1})'} = \rho - b, \qquad -\frac{1}{(C^{-1})'} = \rho - c,$$

ou encore avec les notations (88),

$$(104) \quad \alpha = (A^{-1})' = \frac{1}{a-\rho}, \qquad 6 = (B^{-1})' = \frac{1}{b-\rho}, \qquad \gamma = (C^{-1})' = \frac{1}{c-\rho};$$

et, d'autre part, les deux équations qui constituent l'hypothèse particulière actuelle, soit $\mathfrak{P} = 0$ et $\mathfrak{Q} = 0$, par exemple, étant

mises à l'aide des expressions (96) sous la forme de rapports égaux, fourniront, eu égard à la valeur précédente (103) de S, la suite d'égalités

$$(105) \qquad \frac{A}{\mathcal{A}} = \frac{B}{\mathcal{B}} = \frac{C}{\mathcal{C}} = \frac{A + B + C}{\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}} = \frac{2\rho'}{\mathcal{S}},$$

d'où nous pourrons tirer les valeurs de A, B, C, ou mieux celles de leurs inverses, savoir

$$(106) \qquad A^{-1} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}}\frac{1}{2\rho'}, \qquad B^{-1} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{B}}\frac{1}{2\rho'}. \qquad C^{-1} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{C}}\frac{1}{2\rho'}.$$

Or, si l'on fait pour un instant

$$a + b + c = s, \qquad (a - \rho)(b - \rho)(c - \rho) = F(\rho),$$

la seconde expression (98) et les suivantes (99) devenant, lorsque l'on y introduira les valeurs actuelles (104) de α, β, γ,

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{4}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)}(a-\rho+b-\rho+c-\rho) = 4\frac{s-3\rho}{F(\rho)}, \\ \mathcal{A} &= \frac{s-3\rho}{F(\rho)} + \frac{1}{(b-\rho)(c-\rho)} = \frac{1}{F(\rho)}(s-3\rho+a-\rho) = \frac{s+a-4\rho}{F(\rho)}, \\ \mathcal{B} &= \frac{+b-4\rho}{F(\rho)}. \qquad \mathcal{C} = \frac{s+c-4\rho}{F(\rho)}, \end{aligned}\right.$$

les valeurs précédentes (106) de A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} seront donc, étant exprimées à l'aide de l'inconnue auxiliaire ρ et de sa dérivée,

$$(107) \qquad A^{-1} = \frac{2(s-3\rho)}{(s+a-4\rho)\rho'}, \quad B^{-1} = \frac{2(s-3\rho)}{(s+b-4\rho)\rho'}, \quad C^{-1} = \frac{2(s-3\rho)}{(s+c-4\rho)\rho'},$$

et par conséquent, si l'on introduit ces valeurs dans les trois intégrales premières (104) obtenues tout à l'heure, l'on voit que la seule inconnue ρ qui nous reste actuellement à déterminer

devra vérifier simultanément trois équations différentielles du second ordre du même type (la variable indépendante étant θ, par hypothèse), savoir

$$(108)\qquad \frac{d}{d\theta}\left[\frac{2(s-3\rho)}{(s+g-4\rho)\frac{d\rho}{d\theta}}\right]=\frac{1}{g-\rho},$$

dans laquelle on devra faire successivement $g=a, b, c$. Or cette dernière équation étant évidemment de la forme

$$M\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+N\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=0,$$

M et N étant des fonctions de ρ, s, et g, il est clair que, sauf la solution banale $\frac{d\rho}{d\theta}=0$ ou $\rho=const.$ qui ne saurait être admise dans la question actuelle, car elle donnerait à la fois par les égalités (105) ($\mathcal{S}$ étant alors une constante différente de zéro), $A=0$, $B=0$, $C=0$, toutes les solutions propres de cette dernière équation (qu'elles soient générales, particulières, ou singulières), seront de la forme $\rho=\mathcal{F}(\theta, s, g)$, et par conséquent ρ ne pourra satisfaire simultanément aux trois équations différentes du type (108) qu'à la condition de supposer en même temps $g=a=b=c$. Et comme cette supposition rendra évidemment égales les trois valeurs (107), et par suite aussi leur trois dérivées α, β, γ, ou, ce qui revient au même, entraînera les conditions $A=B=C$, et $p=0$, $q=0$, $r=0$, il est clair dès maintenant, d'une part, que le premier mode de solution actuellement examiné ne fournira qu'une solution particulière du problème, composée d'une famille de sphères, et, d'autre part, que cette solution, bien que rencontrée ainsi par une voie distincte, sera renfermée également à titre de cas particulier dans celle correspondant à l'hypothèse 3°, que nous examinerons dans un instant.

Et, en effet, si l'on fait attention que par les suppositions

$$a=b=c=g,\qquad\qquad s=a+b+c=3g,$$

les expressions (107) et, par suite, chacune des intégrales premières (104), se réduisent respectivement aux suivantes

$$(109)\qquad A^{-1}=B^{-1}=C^{-1}=\frac{2.3(g-\rho)}{4(g-\rho)\rho'}=\frac{3}{2\rho'},\qquad \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho'}\right)'=\frac{1}{g-\rho},$$

c'est-à-dire, en développant cette dernière équation, et changeant les signes,

$$\frac{3}{2}\frac{\rho''}{\rho'^2}=\frac{1}{\rho-g}\qquad \text{ou}\qquad \frac{\rho''}{\rho'}-\frac{2}{3}\frac{\rho'}{\rho-g}=0,$$

on trouvera dès lors, en l'intégrant une première fois,

$$\rho'(\rho-g)^{-\frac{2}{3}}=3\sigma\qquad \text{ou}\qquad \frac{1}{3}(\rho-g)^{\frac{1}{3}-1}d\rho=\sigma d\theta,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$(\rho-g)^{\frac{1}{3}}=\sigma\theta+\tau\qquad \text{ou}\qquad \rho=g+(\sigma\theta+\tau)^3,$$

d'où l'on tirera enfin, en ayant égard aux valeurs actuelles (109),

$$\rho'=3\sigma(\sigma\theta+\tau)^2\qquad \text{et}\qquad A^{-1}=B^{-1}=C^{-1}=\frac{1}{2\sigma(\sigma\theta+\tau)^2}.$$

Et dès lors, en se reportant aux expressions (76) de Λ et (79) de H, l'équation $\Lambda=0$, obtenue comme solution, pouvant être écrite dans ce cas

$$x^2+y^2+z^2=\frac{h}{2\sigma(\sigma\theta+\tau)^2},$$

l'on voit qu'il suffira de faire en même temps $a=0$, $b=0$, $c=0$, et $h=2\sigma$ pour retrouver littéralement l'équation (75), déjà rencontrée en appliquant directement la méthode de recherches à une famille quelconque de sphères : résultat qui constitue une confirmation, aussi complète qu'on saurait le désirer, de l'exactitude des raisonnements et des calculs qui nous ont amené jusqu'à ce point du développement de la question.

2° « *L'une des trois quantités* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ *est supposée nulle, en même temps que l'une des trois autres* p, q, r ». — Dans ce cas, pour que l'équation restante (91) soit vérifiée en même temps que les deux autres choisies pour point de départ, il faudra encore égaler à zéro, soit le premier facteur, soit le second de cette même équation. Or il est clair que cette dernière hypothèse est bien compatible avec les précédentes, mais qu'elle nous ramènera simplement au cas antérieur 1°, du moment que deux des trois quantités $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ seront alors supposées nulles, et que cette hypothèse entraine forcément, comme nous l'avons vu tout à l'heure, les trois conditions $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. Il suffira donc d'examiner l'autre mode de solution, consistant à annuler le premier facteur p, q, r de l'équation restante (91).

Comme dans ce cas, au contraire, deux des trois quantités p, q, r seront alors supposées nulles, l'on voit déjà que les solutions fournies par cette hypothèse 2° ne pourront être que des cas particuliers de celles fournies par l'hypothèse 3°, puisqu'elles supposent déjà les données de celle-ci, mais toutefois avec une équation en plus, savoir l'une des trois équations $\mathfrak{P} = 0$, ou $\mathfrak{Q} = 0$, ou $\mathfrak{R} = 0$, laquelle constitue évidemment dès lors une restriction de ce dernier cas.

Maintenant, pour savoir en quoi consiste la restriction correspondante de la solution, d'une part le tableau (93) donnera alors, pour les valeurs des coefficients des trois équations en question,

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{L}_1 = 0, & \mathcal{M}_1 = -4\beta, & \mathcal{N}_1 = 4\gamma, \\ \mathcal{L}_2 = 4\alpha, & \mathcal{M}_2 = 0, & \mathcal{N}_2 = -4\gamma, \\ \mathcal{L}_3 = -4\alpha, & \mathcal{M}_3 = 4\beta, & \mathcal{N}_3 = 0, \end{array}\right.$$

et, d'autre part, l'hypothèse actuelle $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ équivaut évidemment, d'après les définitions (89), aux deux conditions $\alpha = \beta = \gamma$, la valeur commune de ces dérivées ne pouvant être nulle, car alors le paramètre disparaitrait totalement de l'équation proposée $\Lambda = 0$. Et dès lors les trois équations

$\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$, $\mathfrak{R} = 0$, se réduisant par là simplement à celles-ci

$$4\alpha(B - C) = 0, \qquad 4\beta(C - A) = 0, \qquad 4\gamma(A - B) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$B = C, \qquad C = A, \qquad A = B,$$

celle de ces trois équations que l'on aura admise pour hypothèse, ainsi qu'il est dit dans l'énoncé de ce cas 2°, exprimera simplement que la surface est de révolution, tout en appartenant à la catégorie qui constituera la solution du cas suivant 3°, lequel, nous restant seul maintenant à examiner, devra forcément contenir la solution la plus générale du problème, et renfermer encore à titre de cas particuliers, d'après ce que nous venons de voir, les solutions propres aux cas 1° et 2°.

3° « *Deux des trois quantités* p, q, r *sont supposées nulles* ». — Dans ce cas la troisième le sera aussi forcément, en vertu de l'identité (90), et par conséquent l'équation restante (91) sera encore satisfaite d'elle-même.

Dans cette dernière hypothèse, le groupe du premier ordre, formé par l'élimination des dérivées secondes, équivaudra donc simplement aux deux conditions $\alpha = \beta = \gamma$, ou, en y introduisant encore une inconnue auxiliaire ρ,

$$(A^{-1})' = (B^{-1})' = (C^{-1})' = \rho', \tag{110}$$

lesquelles n'admettront alors évidemment aucune autre solution que leur intégrale générale, savoir

$$A^{-1} = a^2 + \rho, \qquad B^{-1} = b^2 + \rho, \qquad C^{-1} = c^2 + \rho, \tag{111}$$

d'où nous tirerons

$$A = \frac{1}{a^2 + \rho}, \qquad B = \frac{1}{b^2 + \rho}, \qquad C = \frac{1}{c^2 + \rho}, \tag{112}$$



et

$$(113)\qquad S = A + B + C = \frac{1}{a^2+\rho} + \frac{1}{b^2+\rho} + \frac{1}{c^2+\rho}.$$

Et comme, d'autre part, l'introduction de la même quantité (110) dans l'une quelconque des trois équations du second ordre (102) les réduirait toutes indistinctement à celle-ci

$$S\rho'^2 - 2\rho'' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho''}{\rho'} = \frac{1}{2} S\rho',$$

l'on voit, en remettant dans la dernière de ces égalités à la place de S sa valeur précédente (113), que l'inconnue auxiliaire ρ sera déterminée à son tour, en fonction de la variable indépendante θ, par l'équation du second ordre

$$(114)\qquad \frac{\rho''}{\rho'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\rho} + \frac{1}{b^2+\rho} + \frac{1}{c^2+\rho}\right)\rho',$$

intégrable évidemment elle-même par simple quadrature.

Cela posé, si l'on ne tient pas tout d'abord à obtenir pour résultat du calcul l'équation de la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, l'on pourra, sans prendre la peine d'intégrer cette dernière équation, adopter pour paramètre géométrique la fonction ρ elle-même qui résulterait de cette intégration, et, en écrivant donc λ à la place de ρ, les valeurs cherchées des coefficients de la forme proposée (76) de Λ seront

$$(115)\qquad A = \frac{1}{a^2+\lambda}, \qquad B = \frac{1}{b^2+\lambda}, \qquad C = \frac{1}{c^2+\lambda}, \qquad H = h.$$

Et dès lors il ressortira, avec une complète rigueur, comme conclusion de l'analyse et de la discussion un peu minutieuses que nous venons de présenter, que non seulement la solution la plus générale, mais réellement aussi *la seule* de la question proposée, consistera dans l'équation

$$(116)\qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = h,$$

laquelle renferme en apparence quatre constantes arbitraires, nombre égal à celui des coefficients de l'équation proposée $\Lambda = 0$, mais parmi lesquelles il n'y en a en réalité que deux qui sont essentielles (*), résultat parfaitement conforme aux prévisions déduites de notre théorie, que nous avions formulées un peu plus haut (p. 88).

Si, au contraire, l'on veut poursuivre jusqu'au bout la solution de la question dans les termes mêmes où elle a été posée, c'est-à-dire si l'on tient à obtenir l'équation de la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, il restera encore à déterminer l'inconnue auxiliaire ρ par l'intégration de l'équation du second ordre (114). A cet effet, convenant dès maintenant de poser pour tout le cours de ce travail

$$(117) \qquad f(\rho) = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho),$$

d'où, par suite,

$$lf(\rho) = l(a^2 + \rho) + l(b^2 + \rho) + l(c^2 + \rho),$$

et

$$(118) \qquad \frac{d.lf(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{a^2 + \rho} + \frac{1}{b^2 + \rho} + \frac{1}{c^2 + \rho},$$

(*) En effet, si l'on divise cette équation (116) par h, et qu'on l'écrive

$$\frac{x^2}{h(a^2 + \lambda)} + \frac{y^2}{h(b^2 - a^2) + h(a^2 + \lambda)} + \frac{z^2}{h(c^2 - a^2) + h(a^2 + \lambda)} = 1,$$

puis que l'on y fasse ensuite

$$h(a^2 + \lambda) = \lambda', \qquad h(b^2 - a^2) = b'^2, \qquad h(c^2 - a^2) = c'^2,$$

et que l'on y efface enfin les accents, il est clair qu'elle se transformera dans la suivante

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

analogue à celle adoptée par Lamé, comme point de départ, pour l'étude de son système triplement isotherme du second ordre. (*Voir leçons sur les Fonctions Inverses*, §§ XIII et XXXV, pages 17 et 45.)

puis récrivant en conséquence cette même équation (114) sous la forme

$$(119) \quad \frac{d.l\rho'}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d.lf(\rho)}{d\rho}\frac{d\rho}{d\theta} \qquad \text{ou} \qquad d.l\rho' = \frac{1}{2}\frac{d.lf(\rho)}{d\rho}d\rho,$$

nous trouverons, en l'intégrant une première fois,

$$l\rho' = l.f(\rho)^{\frac{1}{2}} + l\sigma \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\rho}{d\theta} = \sigma\sqrt{f(\rho)},$$

ou encore, en séparant les variables, et remettant à la place de $f(\rho)$ sa valeur de définition (117),

$$(120) \qquad \sigma d\theta = \frac{d\rho}{\sqrt{(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)}}.$$

Nous effectuerons un peu plus loin sur cette dernière équation la seconde intégration, qui nous reste à accomplir pour avoir l'expression de l'inconnue auxiliaire ρ, laquelle étant reportée dans les expressions ci-dessus (112), fournira la réponse définitive à la question proposée. Mais nous nous contenterons pour l'instant, à l'exemple de Lamé (*), de l'indiquer par une simple quadrature en écrivant l'égalité

$$(121) \qquad \sigma\theta + \tau = \int^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)}},$$

laquelle suffit à montrer déjà que cette fonction ρ, qui n'est autre que le paramètre λ de la famille déjà obtenue (116), s'exprimera en fonction du paramètre thermométrique θ par des fonctions elliptiques de première espèce. Nous croyons toutefois devoir faire remarquer sans plus attendre, que le nombre des constantes, dans la solution ainsi obtenue, est bien en réalité celui que notre théorie nous avait fixé comme nombre maximum de ces mêmes constantes.

(*) *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc. (§ XXXV, (page 46), formules (3) et (3bis)).

En effet, l'on voit sans peine que, parmi les trois constantes a^2, b^2, c^2, qui figurent dans les expressions (112) ou (115), il y en a une qui est surabondante, relativement à ces expressions des coefficients elles-mêmes, car il est clair que l'une de ces constantes est amenée dans les résultats uniquement par l'équation additionnelle, que nous avons posée à la suite des deux équations du premier ordre (110) pour définir l'inconnue auxiliaire ρ, dont l'introduction, visant simplement un but de symétrie, n'était nullement nécessaire pour pouvoir intégrer les deux équations en question (110), et former ensuite de la même façon une équation toute semblable à (114) pour déterminer la troisième inconnue. En d'autres termes, si l'on aime mieux, nous eussions pu tout aussi bien écrire les mêmes équations (110) en entendant que ρ y désigne, non plus une inconnue auxiliaire, mais bien l'une des trois inconnues A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} elles-mêmes, la première par exemple (*), auquel cas l'intégration de ces mêmes équations, qui n'eussent constitué alors en réalité que deux équations seulement, nous eût donné, sans introduire pour cela aucune restriction, les valeurs

$$A^{-1} = \rho, \qquad B^{-1} = b^2 + \rho, \qquad C^{-1} = c^2 + \rho,$$

qui ne diffèrent des précédentes (111) que par l'absence de la constante a^2.

(*) C'est-à-dire, en fait, que nous eussions pris pour paramètre géométrique λ ou ρ l'inconnue A^{-1} elle-même, ou, ce qui est la même chose, fait après coup $A = \frac{1}{\lambda}$ dans l'équation $A = 0$, ainsi que nous l'indiquons dans l'Exposé général de notre méthode, pour le cas d'exception dans lequel nous nous trouvons (p. 65). Mais ce serait une grave erreur de croire, en raison de la simplicité extrême de forme qu'acquerraient ainsi ces équations, devenues par ce fait $1 = (B^{-1})' = (C^{-1})'$, et de la facilité avec laquelle elles s'intègrent alors, que l'on aurait eu un motif ou un avantage quelconque, pour appliquer notre méthode, à introduire préalablement la même hypothèse dans l'expression proposée (76) de A, qui, égalée à zéro, constitue la famille de surfaces envisagée. En effet, tout d'abord, aucune considération rationnelle n'indiquait spécialement à l'avance de, préférence à tout autre, le choix pour l'un des coefficients A, B, C de cette fonction simple $\frac{1}{\lambda}$ qui procurera seule la simplification en question. Et d'autre part, aussi bien avec ce choix qu'avec tout autre, l'on eût rompu la symétrie essentielle entre les inconnues A, B, C, c'est-à-dire au fond entre les trois axes rectilignes, sans laquelle il eût été bien malaisé d'arriver à découvrir les deux points capitaux qui forment comme le nœud de tout ce calcul, à savoir, d'abord que les trois équations du premier ordre (84) se réduisent à deux, et surtout qu'elles sont composées chacune de *deux facteurs*, ainsi que le montre la forme (91) de ces mêmes équations.

Cette constante ne devant donc pas entrer en ligne de compte comme surérogatoire, on voit ainsi, en rapprochant les expressions (121) et (112), que ces trois dernières ne contiendront en réalité que quatre constantes arbitraires, savoir σ, τ, b^2, et c^2, et par conséquent, qu'étant jointes à la valeur (79) $H = h$ du dernier coefficient, elles renfermeront bien ensemble seulement les $4 + 1 = 5$ constantes prévues par notre théorie (p. 88). C'est au reste le fait qui apparaîtra *littéralement*, lorsqu'après avoir effectué la dernière intégration relative à l'équation (120), nous aurons substitué la valeur qui en résultera pour ρ dans les expressions précitées (112) des coefficients qu'il s'agissait de déterminer.

L'équation (116) des surfaces homofocales, constituant ainsi la seule solution de la question proposée, en contient donc toutes les solutions possibles, soit à titre de cas particuliers, comme la sphère et les surfaces de révolution que nous avons rencontrées expressément d'ailleurs dans notre calcul comme solution des deux cas 1° et 2°, soit à titre de cas limites, correspondant à des valeurs nulles ou infinies des constantes. Il convient donc, avant d'aborder le problème dans toute sa généralité, d'examiner rapidement quels pourront être ces cas limites, c'est-à-dire quelles variétés de surfaces du second ordre l'on devra considérer comme renfermées dans la solution ci-dessus (116).

A cet effet, faisant tout d'abord $h = 0$, dans cette équation (116), nous obtiendrons en premier lieu les cônes homofocaux

(122) $$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 0;$$

puis remarquant que, si dans cette même équation (116), prise avec l'hypothèse $h = 1$, l'on change a^2, b^2, λ, et z, respectivement en cp, cq, $c\lambda$, et $z - c$, et qu'on écrive en même temps $\frac{c^2 + c\lambda}{c(c + \lambda)}$ à la place de 1 dans le second membre, ce qui la tranformera dans la suivante

$$\frac{x^2}{c(p + \lambda)} + \frac{y^2}{c(q + \lambda)} + \frac{(z - c)^2}{c(c + \lambda)} = \frac{c^2 + c\lambda}{c(c + \lambda)},$$

ou ce qui est la même chose, en réduisant, puis multipliant par c, dans celle-ci

(123) $$\frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}+\frac{z^2}{c+\lambda}=\frac{2z+\lambda}{1+\frac{\lambda}{c}},$$

cette même équation se réduira ensuite, en y faisant $c=\infty$, à celles des paraboloïdes homofocaux

(124) $$\frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}=2z+\lambda,$$

laquelle doit être considérée ainsi comme renfermée à titre de cas limite dans celle précédemment obtenue (116). Or le simple changement de notation, à l'aide duquel cette équation (116) s'est trouvée ainsi transformée dans l'équation (123), n'ayant d'autre influence sur l'expression du rapport $\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}$, que de multiplier par $\frac{1}{c}$ la valeur de ce rapport, il est clair que quelque valeur que l'on attribue à c la famille de surfaces n'aura pas cessé d'être isotherme, et par suite l'équation (124) des paraboloïdes homofocaux est encore une solution du problème.

Et de même, il est clair que, si l'on fait grandir indéfiniment l'une des constantes a^2, b^2, c^2 dans l'équation (116), ou bien p ou q dans cette dernière (124) les deux cylindres ainsi obtenus, soient par exemple

(125) $$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=h, \qquad \text{et} \qquad \frac{y^2}{q+\lambda}=2z+\lambda,$$

qui seront alors elliptique ou hyperbolique quant au premier, et parabolique quant au second, seront encore deux solutions limites renfermées implicitement dans la solution précédente (116).

Il nous sera facile à présent de faire disparaître la restriction, que nous avons apportée tout d'abord à l'énoncé du problème de l'isothermie pour les surfaces du second ordre, et de voir à quelles

conclusions nous conduirait notre méthode, si nous l'appliquions à l'équation la plus générale du second ordre, en prenant, dans l'équation $\Lambda = 0$, pour la fonction Λ, au lieu de la forme très particulière (76), la forme générale à dix coefficients

$$(126)\quad \Lambda = \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \mathcal{C}z^2 + 2\mathcal{D}yz + 2\mathcal{E}zx + 2\mathcal{F}xy + 2\mathcal{G}x + 2\mathcal{H}y + 2\mathcal{K}z + \mathcal{J},$$

de manière à ne plus rien préjuger relativement aux centres et aux plans principaux des différentes surfaces composant une même famille.

En effet, introduisant pour cela l'hypothèse de $m = 2$, dans les conclusions de notre théorie pour le cas le plus général (conclusions qu'il sera aisé de vérifier sur ce cas simple), nous verrons, en premier lieu, que le premier membre de notre équation générale (53) sera dans le cas actuel un polynome complet de degré $3.2 - 2 = 4$, dont le nombre de termes sera par conséquent de $\frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$; et partant de là, si l'on applique de point en point la méthode que nous avons indiquée, comme l'élimination de toutes les dérivées secondes entre les 35 équations du second ordre que l'on sera ainsi conduit à poser, fournira un système complet du premier ordre, c'est-à-dire un système de dix équations simultanées distinctes, entre les dix inconnues $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... $\mathcal{J}$, et leurs dérivées premières (*), l'on sera donc

(*) On formera précisément par cette voie, en effet, le système *normal* du premier ordre, auquel sont astreintes à satisfaire nos dix inconnues, savoir

$$\left\{\begin{array}{ll}
\mathcal{A}' + \mathcal{A}^2 + \mathcal{F}^2 + \mathcal{E}^2 = 0, & \mathcal{D}' + (\mathcal{B} + \mathcal{C})\mathcal{D} + \mathcal{E}\mathcal{F} = 0,\\
\mathcal{B}' + \mathcal{B}^2 + \mathcal{D}^2 + \mathcal{F}^2 = 0, & \mathcal{E}' + (\mathcal{C} + \mathcal{A})\mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{D} = 0,\\
\mathcal{C}' + \mathcal{C}^2 + \mathcal{E}^2 + \mathcal{D}^2 = 0, & \mathcal{F}' + (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{F} + \mathcal{D}\mathcal{E} = 0,
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{G}' + \mathcal{A}\mathcal{G} + \mathcal{F}\mathcal{H} + \mathcal{E}\mathcal{K} = 0,\\
\mathcal{H}' + \mathcal{B}\mathcal{H} + \mathcal{D}\mathcal{K} + \mathcal{F}\mathcal{G} = 0,\\
\mathcal{K}' + \mathcal{C}\mathcal{K} + \mathcal{E}\mathcal{G} + \mathcal{D}\mathcal{H} = 0,
\end{array}\right.$$

$$\mathcal{J}' + \mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K}^2 = 0,$$

assuré par là, que l'ensemble des expressions les plus générales de ces inconnues ne pourra renfermer un nombre de constantes arbitraires supérieur à dix, c'est-à-dire que ce nombre sera au plus égal, ainsi que nous l'avons dit, à celui des coefficients de l'expression proposée (126) de Λ (p. 64). Or, cette conclusion nous suffit sans qu'il soit nécessaire d'intégrer le système en question, pour obtenir immédiatement la solution la plus générale demandée.

Il nous est très facile, en effet, en partant des résultats que nous avons obtenus tout à l'heure, de former de toutes pièces une solution du problème renfermant précisément ce même nombre de dix constantes arbitraires, car si, désignant toujours par A, B, C les expressions rencontrées tout à l'heure (115), nous transformons à l'aide d'un système de coordonnées rectangulaires quelconques

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x'_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= y'_0 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= z'_0 + \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{aligned}\right.$$

l'équation de la famille de surfaces

$$(127) \qquad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = h,$$

que nous venons d'obtenir pour solution de la question précédente, ce qui la changera dans la suivante

$$(128) \quad \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{D}yz + \mathfrak{E}zx + 2\mathfrak{F}xy + 2\mathfrak{G}x + 2\mathfrak{H}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{J} = 0,$$

---

dont les dix équations se partagent, comme cela doit être, en quatre groupes (trois formés de trois équations, et un d'une seule) qui se reproduisent séparément par l'échange des trois équations entre elles, ou des trois derniers termes entre eux pour la dernière, lorsque l'on y permute les trois axes coordonnés, c'est-à-dire en fait *simultanément* les trois groupes $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F})$, et $(\mathfrak{G},\ \mathfrak{H},\ \mathfrak{K})$.

Nous montrons dans la Note I de l'Appendice, comment on peut arriver, malgré la complication des calculs, à former effectivement ces équations qui représentent les dix équations figurées par le type (15) de cette Note, traduites dans les notations actuelles, à l'aide de la *clef* fournie par le tableau (41) que l'on trouvera en fin de la même Note.

dans laquelle les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... $\mathcal{J}$, auront les valeurs

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A} = A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2, \qquad \mathcal{D} = A\beta\gamma + B\beta'\gamma' + C\beta''\gamma'',\\ &\mathcal{B} = A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2, \qquad \mathcal{E} = A\gamma\alpha + B\gamma'\alpha' + C\gamma''\alpha'',\\ &\mathcal{C} = A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2, \qquad \mathcal{F} = A\alpha\beta + B\alpha'\beta' + C\alpha''\beta'',\\ &\qquad\qquad \mathcal{G} = A\alpha x'_0 + B\alpha' y'_0 + C\alpha'' z'_0,\\ &\qquad\qquad \mathcal{S} = A\beta x'_0 + B\beta' y'_0 + C\beta'' z'_0,\\ &\qquad\qquad \mathcal{H} = A\gamma x'_0 + B\gamma' y'_0 + C\gamma'' z'_0,\\ &\qquad\qquad \mathcal{J} = A x'^2_0 + B y'^2_0 + C z'^2_0 - h, \end{aligned}\right.$$

l'expression du rapport $\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}$ n'étant pas altérée par une transformation quelconque de coordonnées, en vertu de la propriété caractéristique des invariants différentiels Δ_1 et Δ_2, il est clair qu'après cette transformation, la famille de surfaces (127) n'aura pas cessé d'être isotherme. Or, si l'on se rappelle que les neuf cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', sont liés par six relations, en sorte qu'il en reste trois de réellement arbitraires, on voit que l'équation (128) comprendra bien alors dans l'expression de ses coefficients (129) dix constantes réellement arbitraires, savoir les trois cosinus en question, x'_0, y'_0, z'_0, a^2, b^2, c^2, et h. La solution la plus générale relative au problème de l'isothermie pour les surfaces du second ordre, envisagé sans restriction, ne diffère donc pas essentiellement de celle obtenue pour le problème particulier précédemment examiné; d'où il suit que les solutions singulières, s'il en existe, devront être également identiques au fond pour les deux problèmes, puisqu'elles se déduisent précisément de la solution la plus générale à l'aide d'une règle fixe et connue (*), et comme celui que nous avons traité tout d'abord ne comporte aucune solution de ce genre, ainsi que nous l'avons rigoureusement démontré, le problème le plus général en question ne saurait en admettre non plus.

Par conséquent le type (116) des surfaces homofocales, en y

(*) Voir JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III, § 10 (pp. 14-16).

comprenant comme cas limites les cônes (122), les paraboloïdes (124), et les cylindres (125) (*), représentent bien de nouveau, non seulement la solution la plus générale, mais encore la *seule* solution, du problème de l'isothermie relativement à la classe si importante des Surfaces du Second Ordre.

IV° (*Type particulier d'Ordre supérieur*). — Enfin, comme exemple des cas où la méthode de critérium que nous avons indiquée fournit comme solution du problème une conclusion négative, prenons en terminant, pour l'équation $\Lambda = 0$, l'équation de degré m dans laquelle Λ serait la fonction très simple

$$\Lambda = Ax^m + By^m + Cz^m - h,$$

les trois coefficients A, B, C étant supposés expressément tous trois différents de zéro, et h désignant encore comme dans le résultat obtenu tout à l'heure une simple constante demeurant arbitraire. Cette dernière expression donnant alors

$$\left\{\begin{aligned}
&\Lambda' = A'x^m + B'y^m + C'z^m, \qquad \Lambda'' = A''x^m + B''y^m + C''z^m,\\
&\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\frac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\frac{\partial\Lambda'}{\partial z} = m^2(AA'x^{2m-2} + BB'y^{2m-2} + CC'z^{2m-2}),\\
&\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2 = m^2\,(A^2x^{2m-2} + B^2y^{2m-2} + C^2z^{2m-2}),\\
&\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2} = m(m-1)\,(Ax^{m-2} + By^{m-2} + Cz^{m-2}),
\end{aligned}\right.$$

en reportant ces valeurs dans notre équation générale (53), et procédant ensuite à un classement judicieux des différents

(*) Nous ne jugeons utile de mentionner ici expressément que les seuls cas limites, ou en quelque sorte *asymptotiques*, qui correspondent à des valeurs nulles ou infinies des constantes, et non les simples cas particuliers, tels que la sphère ou les surfaces de révolution, obtenus en supposant dans la solution générale (116), ou dans les précédentes (122) ou (125), les trois constantes a^2, b^2, c^2, ou deux seulement égales entre elles, bien que Lamé les fasse figurer individuellement dans l'énumération et l'examen déjà mentionnés dans la note de la page 77. (Lamé, *Leçons sur les Fonctions Inverses*, pages 8-11, et 19-26.)

termes, on obtiendra sans peine pour cette même équation dans ce second exemple, en n'écrivant qu'un coefficient pour chaque type, la suivante

$$
\begin{aligned}
&A\{m(A''+TA')A-(m+1)A'^2\}x^{2m-2}+B\{\ \ldots\ \}y^{2m-2}+C\{\ \ldots\ \}z^{2m-2}\\
&+[B\{m(C''+TC')B-(m+1)B'C'\}y^{m-2}+C\{m(B''+TB')C-(m+1)C'B'\}z^{m-2}]y^m z^m\\
&+[C\{\ldots\qquad\ldots\}z^{m-2}+A\{\ldots\qquad\ldots\}x^{m-2}]z^m x^m\\
&+[A\{\ldots\qquad\ldots\}x^{m-2}+B\{\ldots\qquad\ldots\}y^{m-2}]x^m y^m\\
&+(m-1)[(B+C)A'^2x^4+\ldots+(B+C+2A)B'C'y^2z^2+\ldots]x^{m-2}y^{m-2}z^{m-2}=0,
\end{aligned}
$$

laquelle reproduit bien effectivement, en y faisant $m=2$ et $T=0$, notre équation (81) de l'exemple précédent. Seulement, lorsque l'on supposera $m>2$, il est évident que les différents coefficients que nous avons fait ressortir, appartiendront tous à des termes réellement distincts en x, y, z (circonstance qui n'a plus lieu pour $m=1$ et $m=2$); car ceux de la première ligne de cette dernière équation ne contiennent qu'une variable seulement, ceux des trois lignes suivantes deux variables, et ceux de la dernière ligne les trois variables à la fois. D'où il suit qu'ils devront être égalés tous à zéro séparément, et que notre méthode nous conduit ainsi à poser entre les trois coefficients inconnus A, B, C, les quinze équations, dont les neuf premières du second ordre, et les six autres du premier ordre seulement, dont les types seront

$$
(130)\quad \left\{
\begin{aligned}
&m(A''+TA')A-(m+1)A'^2=0,\ldots\\
&(m+1)B'C'=m(C''+TC')B=m(B''+TB')C,\ldots\\
&(B+C)A'^2=0,\ldots(B+C+2A)B'C'=0,\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Or l'élimination des trois quantités $(A''+TA')$, $(B''+TB')$, $(C''+TC')$, entre les neuf premières équations donnant immédiatement dans ces conditions, du moment que A, B, C ne peuvent être supposés nuls,

$$
BC'-CB'=0,\ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=\rho,
$$

la valeur ρ de ces derniers rapports ne pouvant elle-même être supposée nulle, sans réduire simultanément les trois coefficients A, B, C à de simples constantes, on voit que la nouvelle élimination des trois dérivées A′, B′, C′ entre ces dernières équations et celle de la dernière ligne (130) conduira forcément aux six équations

$$(B + C)A^2 = 0, \ldots \qquad (B + C + 2A)BC = 0, \ldots$$

qui ne sauraient évidemment être satisfaites que par des valeurs constantes des coefficients A, B, C (*), en sorte que l'équation $\Lambda = 0$ représenterait alors une surface particulière, et non plus une famille de surfaces. D'où l'on peut affirmer en toute certitude, que de quelque façon que l'on prenne les trois coefficients A, B, C, et la constante h, il sera impossible que l'équation

$$Ax^m + By^m + Cz^m = h,$$

représente une famille isotherme de surfaces, sauf pour les deux cas exceptionnels de $m = 1$ et $m = 2$, examinés précédemment.

Cette conclusion, étant rapprochée de la forme d'équation (57), que nous avons obtenue plus haut pour la solution la plus générale du problème relative au premier degré, met en évidence ce fait intéressant, qui n'avait sans doute pas encore été signalé, à savoir que c'est *exclusivement* pour la valeur $m = 2$ que la forme d'équation

$$\frac{x^m}{\alpha + \lambda} + \frac{y^m}{6 + \lambda} + \frac{z}{\gamma + \lambda} = 1 ,$$

α, 6, γ étant des constantes *supposées différentes*, peut fournir une famille isotherme de surfaces, en sorte que le type analytique des surfaces homofocales du second ordre, constitue en réalité, au point de vue de l'isothermie, un fait isolé parmi les surfaces simplement algébriques.

(*) On aperçoit même très aisément que ces valeurs constantes, dans le cas actuel, ne sont autres que zéro, mais cette particularité ne présente aucun intérêt pour la conclusion qui est le but de notre recherche, et qui resterait la même, quelles que fussent ces valeurs constantes.



Vérification des résultats qui précèdent a l'aide du procédé de Lamé. — Théorèmes relatifs a l'isothermie concernant les surfaces du premier et du second ordre. — Il ne sera pas inutile avant d'abandonner ce sujet, aussi bien à titre de confirmation des résultats précédents obtenus par notre méthode, que pour permettre au lecteur, en lui remettant exactement sous les yeux l'état de la question sur les mêmes points, de comparer le rôle et l'utilité des deux méthodes, il ne sera pas inutile, disons-nous, même au prix de deux ou trois pages de plus, de vérifier rapidement ces résultats à l'aide du procédé de Lamé, dont l'emploi dans ces conditions devient alors sûr et commode; puis cela fait, de formuler ensuite en théorèmes, pour les mieux graver dans l'esprit, les conclusions ainsi doublement fondées de cette Étude, attendu que nous aurons à les invoquer à chaque instant, dans tout le cours de cette Théorie, et surtout dans le Chapitre suivant où seront examinés successivement tous les cas particuliers intéressants du problème.

1° (*Plan*). — Partant de la forme d'équation (57) ou (58) considérée comme donnée, c'est-à-dire de celle-ci

$$\lambda = \frac{N}{D}, \tag{131}$$

en faisant pour simplifier,

$$N = ax + by + cz + d, \qquad D = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \tag{132}$$

on en tirera, en différentiant par rapport à x l'expression (131) de λ,

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{D^2}(Da - N\alpha) = \frac{1}{D}\left(a - \alpha\frac{N}{D}\right) = \frac{1}{D}(a - \alpha\lambda), \tag{133}$$

d'où les trois valeurs

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{-1}{D}(\alpha\lambda - a), \quad \frac{d\lambda}{dy} = \frac{-1}{D}(\beta\lambda - b), \quad \frac{d\lambda}{dz} = \frac{-1}{D}(\gamma\lambda - c),$$

et enfin celle-ci

$$(134)\qquad \Delta_1^2\lambda=\frac{1}{D^2}\left[(\alpha\lambda-a)^2+(6\lambda-b)^2+(\gamma\lambda-c)^2\right]=\frac{1}{D^2}(P\lambda^2-2Q\lambda+R),$$

P, Q, R, désignant comme ci-dessus les trois quantités (63). Puis différentiant une seconde fois la valeur (133) prise sous sa première forme, et remarquant que le numérateur (Da — $N\alpha$) ne contient pas x, ce qui donnera

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}=-2(Da-N\alpha)D^{-3}\alpha=\frac{-2\alpha}{D^2}\left(a-\alpha\frac{N}{D}\right)=\frac{2\alpha}{D^2}(\alpha\lambda-a),$$

on aura semblablement, pour les dérivées secondes, les valeurs

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}=\frac{2\alpha}{D^2}(\alpha\lambda-a),\qquad \frac{d^2\lambda}{dy^2}=\frac{26}{D^2}(6\lambda-b),\qquad \frac{d^2\lambda}{dz^2}=\frac{2\gamma}{D^2}(\gamma\lambda-c),$$

et

$$(135)\qquad \Delta_2\lambda=\frac{2}{D^2}\left[\alpha(\alpha\lambda-a)+6(6\lambda-b)+\gamma(\gamma\lambda-c)\right]=\frac{2}{D^2}(P\lambda-Q),$$

d'où par suite, en divisant l'une par l'autre les deux expressions (135) et (134),

$$\frac{\Delta^2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}=\frac{2(P\lambda-Q)}{P\lambda^2-2Q\lambda+R}=-\Psi(\lambda)$$

Donc la famille de surfaces donnée (131) est isotherme.

Pour avoir à présent l'expression de son paramètre thermométrique, remarquant que la valeur de la fonction $\Psi(\lambda)$, définie par l'équation qui précède, peut s'écrire $-\frac{d}{d\lambda}\log(P\lambda^2-2Q\lambda+R)$, et la reportant dans la seconde équation (32) de Lamé, nous aurons immédiatement

$$\sigma\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{1}{P\lambda^2-2Q\lambda+R}\qquad\text{ou}\qquad P\lambda^2-2Q\lambda+R=\sigma\frac{d\lambda}{d\theta},$$

en y écrivant σ au lieu de $\frac{1}{\sigma}$, équation en λ alors identique, en tenant compte de la valeur (62) de S, à l'équation en ρ, $S=\sigma\rho'$

[la dernière (60)], qui nous a fourni notre expression (67) de ρ, et qui dès lors, étant intégrée comme nous l'avons fait, nous conduirait finalement à cette même expression, et de là encore par un changement de coordonnées à l'équation (69), ainsi que nous nous proposions de le vérifier.

2° (*Sphère*). — De l'équation donnée (74), où nous ferons pour plus de simplicité, $a=0$, $b=0$, $c=0$, savoir

(136) $$x^2+y^2+z^2=\lambda,$$

l'on tirerait

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{d\lambda}{dx}=2x, & \dfrac{d\lambda}{dy}=2y, & \dfrac{d\lambda}{dz}=2z, & \Delta_1^2\lambda=4(x^2+y^2+z^2)=4\lambda, \\ \dfrac{d^2\lambda}{dx^2}=2, & \dfrac{d^2\lambda}{dy^2}=2, & \dfrac{d^2\lambda}{dz^2}=2, & \Delta_2\lambda=6, \end{array}\right.$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}=\frac{6}{4\lambda}=\frac{3}{2\lambda}=-\Psi(\lambda).$$

Donc déjà les sphères concentriques (136) forment une famille isotherme.

Cela fait, l'équation (31) de Lamé sera donc pour ce cas

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\log\frac{d\theta}{d\lambda}\right)=-\frac{3}{2\lambda} \quad \text{ou} \quad d\left(\log\frac{d\theta}{d\lambda}\right)+\frac{3}{2}\frac{d\lambda}{\lambda}=0;$$

d'où, en intégrant une première fois,

$$\frac{d\theta}{d\lambda}\cdot\lambda^{\frac{3}{2}}=\frac{-1}{2\sigma} \quad \text{ou} \quad \sigma d\theta=-\frac{1}{2}\lambda^{-\frac{3}{2}}d\lambda,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$\sigma\theta+\tau=\lambda^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \lambda=\frac{1}{(\sigma\theta+\tau)^2},$$

valeur qui, étant reportée dans l'équation donnée (136), reproduit bien, eu égard à la valeur 0 admise par a, b, c, la même équation (75), à laquelle nous avait conduit directement notre méthode en adoptant pour variable indépendante le paramètre thermométrique θ, et que nous avons retrouvée également un peu plus tard comme cas particulier de la solution relative aux surfaces du second ordre en général (p. 93) (*).

3° (*Surfaces du Second Ordre*). — Vérifions enfin à l'aide du même procédé que la famille de surfaces homofocales (116) réalise bien la condition de l'isothermie exprimée par l'équation (28), qu'elles que soient les valeurs attribuées aux constantes a^2, b^2, c^2, et h.

Pour cela, ayant en différentiant cette équation (116) par rapport à x,

$$\frac{2x}{a^2+\lambda} - \left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

nous poserons, pour abréger l'écriture,

$$(137) \qquad \mathrm{H} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2},$$

ce qui permettra d'écrire cette dernière équation sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(138) \qquad \frac{2x}{a^2+\lambda} - \mathrm{H}\frac{d\lambda}{dx} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{2x}{a^2+\lambda},$$

et dès lors une première différentiation de cette même équation (116) nous donnera les trois suivantes

$$(139) \qquad \frac{2x}{a^2+\lambda} = \mathrm{H}\frac{d\lambda}{dx}, \qquad \frac{2y}{b^2+\lambda} = \mathrm{H}\frac{d\lambda}{dy}, \qquad \frac{2z}{c^2+\lambda} = \mathrm{H}\frac{d\lambda}{dz},$$

(*) Lamé présente le même calcul sous une forme légèrement différente, mais un peu moins simple et moins naturelle, dans les *Leçons sur les Fonctions Inverses*, § VII, page 8.

lesquelles, étant élevées au carré et ajoutées, donneront :

(140) $4\text{H} = \text{H}^2\Delta_1^2\lambda,$ d'où $\Delta_1^2\lambda = \frac{4}{\text{H}},$ et $\text{H} = \frac{4}{\Delta_1^2\lambda}.$

Cela fait, différentiant à nouveau la première équation (139) par rapport à x, nous trouverons :

(141) $$\frac{2}{a^2+\lambda} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dx} = \text{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d\text{H}}{dx}\frac{d\lambda}{dx}.$$

Or, la différentiation de l'expression (137) donnant en même temps

(142) $$\frac{d\text{H}}{dx} = \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2} - 2\text{K}\frac{d\lambda}{dx},$$

en posant semblablement

(143) $$\text{K} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3},$$

l'équation qui précède (141) deviendra, par la substitution de la valeur (142),

$$\frac{2}{a^2+\lambda} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dx} = \text{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \left[\frac{2x}{(a^2+\lambda)^2} - 2\text{K}\frac{d\lambda}{dx}\right]\frac{d\lambda}{dx},$$

ou, en développant et réduisant,

$$\frac{2}{a^2+\lambda} = \text{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{4x}{(a^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dx} - 2\text{K}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2;$$

et par conséquent, en y remettant à la place de la dérivée $\frac{d\lambda}{dx}$ sa valeur (138), nous aurons la première des trois équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2}{a^2+\lambda} &= \text{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{8}{\text{H}}\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3} - 2\text{K}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2, \\ \frac{2}{b^2+\lambda} &= \text{H}\frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{8}{\text{H}}\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3} - 2\text{K}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2, \\ \frac{2}{c^2+\lambda} &= \text{H}\frac{d^2\lambda}{dz^2} + \frac{8}{\text{H}}\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3} - 2\text{K}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

les deux autres devant être fournies évidemment par un calcul semblable. Or si nous ajoutons ces trois dernières équations, en ayant égard successivement à la définition (143) de K, puis aux valeurs réciproques (140) de H et de $\Delta_1^2\lambda$, il est clair que nous obtiendrons ainsi

$$2\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]=H\Delta_2\lambda+\frac{8}{H}K-2K\Delta_1^2\lambda$$
$$=4\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}+\frac{8}{H}K-2K\frac{4}{H}=4\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda},$$

d'où en divisant par 4, et intervertissant les deux membres extrêmes,

$$(144)\qquad \frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]=-\Psi(\lambda),$$

et par conséquent la famille de surfaces (116) réalise bien la condition de l'isothermie exprimée par l'équation (28).

Cela fait, pour trouver maintenant l'expression du paramètre thermométrique, l'équation (31) de Lamé sera dans le cas actuel, en y écrivant, à la place de $\Psi(\lambda)$, la valeur que nous venons de rencontrer pour cette fonction par l'équation qui précède (144),

$$(145)\qquad \frac{d}{d\lambda}\log\frac{d\theta}{d\lambda}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right],$$

ou, ce qui est la même chose, en changeant tous les signes,

$$d.\log\frac{d\lambda}{d\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]d\lambda$$

équation qui coïncide exactement, eu égard à la précédente (118), avec la seconde équation (119), que nous avons obtenue par notre méthode, sauf le changement comme notation de ρ en λ, et qui conduira par conséquent par une première intégration à la même équation (120) ou (121), pour fournir l'expression

du paramètre thermométrique, avec les deux constantes arbitraires qui entrent essentiellement dans sa définition (*).

Mais si l'on se propose de rapporter la famille de surfaces (116) à son paramètre thermométrique, ce n'est pas, à proprement parler, cette dernière expression, mais bien l'expression inverse, c'est-à-dire celle de λ en fonction du paramètre thermométrique $\sigma\theta + \tau = u$, qu'il importe de connaître, en vue de la substituer à λ dans cette même équation (116). Or, pour obtenir cette dernière expression, le moyen le plus simple consistera à intégrer directement l'équation différentielle (120), ou, ce qui est la même chose, celle-ci

$$(146) \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = du,$$

en y considérant u comme la variable indépendante, parce que, cette équation appartenant à un type simple très connu, on sait à l'avance que l'intégrale sera de la forme

$$\lambda = - a^2 \mathrm{cn}^2(gu + h) - b^2 \mathrm{sn}^2(gu + h),$$

h désignant la constante d'intégration, et g une autre constante déterminée, fonction de a^2, b^2, c^2, et que dès lors on n'aura simplement qu'à trouver les valeurs de cette constante g et du module k, qui procurent la vérification de la même équation (146) par cette expression de λ.

Toutefois, ayant déjà fait entrer les deux constantes arbitraires σ et τ dans la définition de la variable u, savoir $u = \sigma\theta + \tau$, l'introduction des deux nouvelles constantes g et h sera sans

(*) Jusqu'ici, dans cette question, nous n'avons fait, pour ainsi dire, qu'adapter à la notation plus simple et plus symétrique de Jacobi pour les surfaces homofocales (dont on reconnaîtra le très grand avantage dans la suite de ce travail) le calcul de Lamé, qui forme le point de départ de la belle découverte des coordonnées thermométriques auxquelles son nom restera toujours attaché. (*Leçons sur les Fonctions Inverses*, § XIII, pp 17-18). Mais il n'en sera pas de même du calcul qui va suivre, relatif à la seconde intégration, savoir celle de l'équation (120) ou (146), qui n'est en réalité qu'*indiquée* et non pas *effectuée* par Lamé dans la théorie que nous venons de rappeler.

intérêt dans la question actuelle, et ferait double emploi avec les précédentes, attendu que les deux notations $g(\sigma\theta + \tau) + h$, ou simplement $\sigma\theta + \tau$, représenteront l'une et l'autre exactement la même quantité. C'est pourquoi il suffira de prendre pour λ l'expression

$$(147) \qquad \lambda = -a^2 \mathrm{cn}^2 u - b^2 \mathrm{sn}^2 u,$$

laquelle pourra s'écrire, en tenant compte des relations fondamentales

$$\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u = 1, \qquad \mathrm{dn}^2 u + k^2 \mathrm{sn}^2 u = 1,$$

sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(148) \quad \begin{cases} \lambda = -a^2(1 - \mathrm{sn}^2 u) - b^2 \mathrm{sn}^2 u = -a^2 + (a^2 - b^2)\mathrm{sn}^2 u, \\ \lambda = -a^2 \mathrm{cn}^2 u - b^2(1 - \mathrm{cn}^2 u) = -b^2 - (a^2 - b^2)\mathrm{cn}^2 u, \end{cases}$$

qui donneront immédiatement les trois valeurs :

$$(149) \qquad a^2 + \lambda = (a^2 - b^2)\mathrm{sn}^2 u, \qquad b^2 + \lambda = -(a^2 - b^2)\mathrm{cn}^2 u,$$

$$c^2 + \lambda = -(a^2 - c^2) + (a^2 - b^2)\mathrm{sn}^2 u = -(a^2 - c^2)\left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\mathrm{sn}^2 u\right].$$

Dès lors, on voit qu'il suffira de faire $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$, pour que cette dernière valeur prenne elle-même la forme analogue

$$(150) \qquad c^2 + \lambda = -(a^2 - c^2)(1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u) = -(a^2 - c^2)\mathrm{dn}^2 u,$$

en sorte que l'on aura alors, en la multipliant par les deux expressions semblables (149),

$$(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) = (a^2 - b^2)^2(a^2 - c^2)\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u,$$

et en extrayant les racines

$$\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} = \pm (a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - c^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$$

Or, comme, d'autre part, la différentiation de l'une ou l'autre des deux expressions (148) donnera

$$(151) \qquad d\lambda = (a^2 - b^2).2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u,$$

on aura donc, en divisant l'une par l'autre ces deux dernières égalités, relativement à la valeur de λ exprimée par l'égalité (147),

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \pm\frac{(a^2-b^2).2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u.du}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u} = \frac{\pm 2du}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

ou, en revenant à la variable θ,

$$(152) \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \pm\frac{2\sigma}{\sqrt{a^2-c^2}}\,d\theta,$$

équation qui ne diffère pas en réalité, σ étant arbitraire de l'équation (120) qu'il s'agissait d'intégrer, car l'on en déduirait aussi bien par la différentiation l'équation du second ordre (145) ou (119), qui représente dans le cas actuel, avons-nous vu, l'équation (31) de la théorie de Lamé.

L'expression (147), dans laquelle on attribue au module k la valeur

$$(153) \qquad k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

constitue donc la solution de la question proposée sous la forme la plus propice pour le but que nous avons en vue, qui est de rapporter la famille de surfaces à son paramètre thermométrique. En effet, si nous posons encore, pour simplifier l'écriture, comme nous le ferons plus tard dans le dernier Chapitre de ce travail,

$$(154) \qquad l^2 = a^2 - b^2, \qquad m^2 = b^2 - c^2, \qquad n^2 = c^2 - a^2,$$

d'où

$$(155) \qquad k^2 = \frac{l^2}{-n^2} \qquad \text{et} \qquad n^2 = \frac{l^2}{-k^2},$$

les valeurs (149) et (150) devenant avec ces nouvelles notations

$$(156)\quad a^2+\lambda=l^2\mathrm{sn}^2u,\quad b^2+\lambda=-l^2\mathrm{cn}^2u,\quad c^2+\lambda=-\frac{l^2}{k^2}\mathrm{dn}^2u,\ (^*)$$

si l'on substitue ces trois valeurs dans l'équation (116) de la famille proposée, et qu'on la multiplie en même temps par l^2, en y écrivant au second membre $\frac{1}{d^2}$ à la place de h, d étant alors pour l'homogénéité une simple constante numérique de même que h, cette équation se transformera par là dans la suivante

$$(157)\qquad \frac{x^2}{\mathrm{sn}^2u}-\frac{y^2}{\mathrm{cn}^2u}-\frac{z^2}{\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2u}=\frac{l^2}{d^2},\ (^{**})$$

qui sera dès lors l'équation de la même famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique $u=\sigma\theta+\tau$, et qui montre que pour toutes les surfaces composant cette famille

---

(*) Ces trois expressions n'étant autres que les inverses des trois coefficients inconnus (115) du problème précédent, il appert *littéralement* alors de ces valeurs (156), en ayant égard à la définition de la variable u, le fait annoncé par notre théorie (p. 88), et déjà constaté plus haut (pp. 98-99), à savoir que l'ensemble des expressions des quatre inconnues (115) ne renferme que *cinq* constantes réellement arbitraires, qui sont, sous cette nouvelle forme, σ, τ, l^2, k^2, et h.

(**) Par suite de l'introduction de ce paramètre u, cette équation renferme donc seulement *deux* constantes arbitraires essentielles, savoir $\frac{l}{d}$ et k, de même que l'équation (116), ainsi qu'il était évidemment nécessaire *a priori*.

Cette équation d'ailleurs n'est autre que la première équation (10) du § XCVI des *Leçons sur les Fonctions Inverses* (page 126), Lamé y désignant l'amplitude de l'intégrale elliptique de première espèce par le symbole $\mathcal{A}$ au lieu du symbole *am* introduit par Jacobi dans la notation *sin am*. Mais cette équation qu'il n'écrit qu'incidemment, en vue d'un cas particulier (celui des surfaces de révolution), et en alléguant que « vu son manque de symétrie elle ne saurait être préférée à la première », il la répudie en quelque sorte dans la suite, en n'en faisant mention nulle part dans ses *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, quoiqu'elle nous paraisse, au contraire, bien préférable à celle qu'il adopte pour chacune des trois familles composant son système orthogonal triplement isotherme [formules (1) du § LXXX des *Fonctions Inverses* (page 105), ou (55) du § LXVIII des *Coordonnées Curvilignes* (page 120)]. Quant au reproche de dissymétrie par lequel il motive ce rejet, nous montrerons dans le dernier Chapitre de ce travail qu'il n'est pas fondé, ou tout au moins qu'il n'en subsiste rien dans les formules inverses, qui donnent l'expression des coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées thermométriques, et qui importent seules au point de vue des applications.

isotherme les trois axes seront proportionnels aux trois fonctions simples sn u, cn u, dn u. Ce résultat, étant joint à ceux que nous avons établis par le moyen de notre méthode dans le cours de ce Chapitre nous permettra d'énoncer, comme conclusion de cette Étude, ces quatre théorèmes, dont les réciproques, formulés seuls par Lamé, ne sont en fait qu'une conséquence restreinte (*) :

Théorème I. — « *Dans* toute *famille isotherme de plans, tous* » *les plans qui la composent passent par une même droite, cette* » *droite se transportant tout entière à l'infini lorsque la famille* » *est composée de plans parallèles, et le paramètre thermomé-* » *trique représente pour chaque plan son azimut relativement à* » *un plan fixe de la famille pris pour origine.* »

Théorème II. — « *Dans* toute *famille isotherme de sphères,* » *toutes les sphères qui la composent ont le même centre, et le* » *paramètre thermométrique représente pour chacune l'inverse* » *du rayon.* »

Théorème III. — « *Dans* toute *famille isotherme de surfaces* » *du second ordre, toutes les surfaces qui la composent sont* » *homofocales, c'est-à-dire qu'elles ont toutes les mêmes plans* » *principaux, et dans chacun de ces plans, les deux mêmes points* » *pour foyers de leurs sections relatives à ce plan.* »

Théorème IV. — « *Dans* toute *famille isotherme de surfaces* » *du second ordre, les trois axes sont respectivement propor-*

(*) Nous indiquons par des caractères romains, dans les énoncés qui suivent imprimés en italiques, les mots qui constituent notre modeste part de contribution personnelle dans les propositions que nous formulons comme résumé de cette théorie.

Ce sont donc, en quelque sorte, les *réciproques* de ces théorèmes, à savoir que les différentes familles de surfaces y désignées sont isothermes, qui sont seules établies par Lamé, et que l'on trouve partout depuis lors formulées à ce sujet. Nous espérons que le Lecteur jugera que les propositions, telles que nous les énonçons, éclairent la question d'un jour assurément plus complet, et que cette addition à l'œuvre du Maître sur ce point, quelque légère qu'elle soit, valait encore la peine d'être produite, même au prix des développements, en apparence exagérés, que nous avons dû apporter pour cela à notre Chapitre II.

» *tionnels aux trois fonctions* sin am, cos am, Δ am, *du para-*
» *mètre thermométrique, les coefficients de proportionnalité*
» *restant d'ailleurs les mêmes pour toutes les surfaces qui com-*
» *posent cette famille* (*). »

Observons enfin, en terminant, que si l'on suppose suivant l'usage les trois constantes, positives ou négatives, a^2, b^2, c^2, rangées par grandeur dans l'ordre suivant $a^2 > b^2 > c^2$, lequel donnera par conséquent

$$(158) \qquad a^2 - b^2 > 0, \qquad a^2 - c^2 > 0, \qquad a^2 - b^2 < a^2 - c^2,$$

la valeur (153) du module k sera bien réelle et plus petite que l'unité, ainsi que l'exige la forme dite *canonique* des fonctions elliptiques de première espèce; et si de plus on suppose le paramètre λ astreint à varier entre les limites $-a^2$ et $-b^2$, les valeurs (148) montrent que l'on pourra satisfaire à l'équation (147) par des valeurs de $\operatorname{sn}^2 u$ et $\operatorname{cn}^2 u$ positives et moindres que 1, ce qui veut dire que le paramètre thermométrique u sera alors réel en même temps que λ.

Sauf ce cas, pour lequel l'équation (157) représentera par suite évidemment un hyperboloïde à deux nappes, on ne pourra satisfaire à l'équation (147), qu'en attribuant à l'une au moins des deux fonctions $\operatorname{sn}^2 u$ ou $\operatorname{cn}^2 u$ des valeurs négatives ou plus

(*) Lamé, d'une part, n'ayant pas établi que le type des surfaces homofocales embrasse en réalité, pour les surfaces du second ordre, la totalité des familles isothermes de cet ordre, ne pouvait évidemment formuler cette proposition que pour ce type particulier seulement, et non, comme nous le faisons, pour toutes les familles isothermes du second ordre sans exception.

D'autre part, au lieu de faire usage, pour l'expression des fonctions elliptiques de première espèce, des trois types classiques d'Abel et de Jacobi, il introduit neuf fonctions qui ne coïncident pas exactement avec celles-là, bien qu'ayant avec elles des rapports assez simples (et dont on trouvera la signification exacte mentionnée dans notre dernier Chapitre), et nous semble en cela sacrifier à une préoccupation exclusive de symétrie la clarté des calculs et la lucidité des résultats Nous montrerons d'ailleurs, en revenant sur le même sujet à la fin de ce Mémoire, que l'on peut s'assurer le bénéfice incontestable d'une symétrie aussi complète, et même plus satisfaisante, sans renoncer pour cela à la clarté inhérente à des symboles consacrés par d'illustres travaux et un usage presque général, et entrés définitivement aujourd'hui dans l'Enseignement classique.

grandes que 1, lesquelles correspondront dès lors forcément à des valeurs imaginaires de la variable u. Mais cette circonstance, inévitable par conséquent si l'on veut constituer un système coordonné avec trois familles de surfaces différentes de ce même type (157) (*), n'empêchera pas néanmoins, comme nous le verrons dans notre dernier Chapitre, de faire usage de ces paramètres u comme coordonnées thermométriques, et d'en tirer un parti précieux pour la solution d'importantes questions, auxquelles ces variables se prêteront mieux que le système des coordonnées elliptiques λ et ses homologues, défini par trois équations du type (116), auquel nous serons conduits, comme solution la plus générale du problème, à la fin des deux premiers Chapitres de la Seconde Partie de ce Mémoire.

(*) Pour que trois équations du même type puissent représenter trois familles de surfaces capables de se couper réciproquement, c'est-à-dire par conséquent distinctes, il faut en effet de toute nécessité supposer expressément le paramètre renfermé entre des limites différentes pour chacune, sans quoi, nonobstant la multiplicité des symboles adoptés pour ces paramètres, ces trois équations ne représenteraient alors évidemment qu'une seule et même famille de surfaces.

APPENDICE

NOTE I

SUR LA SOLUTION LA PLUS GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE L'ISOTHERMIE POUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

La méthode proposée par nous dans notre Chapitre II pour la recherche des familles isothermes de surfaces appartenant à une catégorie déterminée, quoiqu'étant parfaitement justifiée en théorie, a pu fort bien, nous le reconnaissons, éveiller quelque doute dans l'esprit du Lecteur au sujet de son efficacité pratique, et par conséquent de sa valeur effective, en raison du trop grand nombre d'équations et de quantités différentes, qu'elles met en jeu et dont elle oblige à tenir compte à la fois. Nous croyons donc utile d'indiquer dans cette Note, par un exemple, le procédé général à l'aide duquel on parviendra à restreindre considérablement l'importance de cette difficulté spéciale, procédé consistant simplement à adopter un mode de notation qui permette de représenter simultanément un grand nombre d'équations semblables par une même formule, de même que l'esprit du calcul algébrique consiste à représenter par un symbole unique un très grand nombre ou une infinité de quantités différentes, que le calcul arithmétique serait forcé de représenter chacune individuellement par un algorithme spécial.

A cet effet, nous reprendrons, pour l'aborder de prime abord dans toute sa généralité, le problème de l'isothermie dans les Surfaces du Second Ordre, problème pour lequel l'application de notre méthode exige la considération simultanée de trente-cinq équations différentielles du second ordre entre dix inconnues, savoir les dix coefficients de l'équation générale proposée, et nous le résoudrons complètement en appliquant pas à pas notre

méthode, sans supposer connus, bien entendu, ni faire intervenir en quoi que ce soit, à un instant quelconque de la recherche, les résultats que nous avons déjà obtenus pour cette même question par un procédé abréviatif, dans le Chapitre précité.

Soit donc cette fois $\Lambda = 0$, l'équation la plus générale du second ordre, équation que nous aurons grand avantage, pour la facilité des calculs, à prendre sous la forme homogène avec laquelle on l'étudie le plus habituellement aujourd'hui, en posant

$$(1) \qquad \Lambda = \sum_i \sum_j A_{ij} x_i x_j,$$

avec la condition $A_{ij} = A_{ji}$, chacun des indices i et j devant recevoir séparément les quatre valeurs 0, 1, 2, 3, en sorte que Λ sera alors une forme quadratique à quatre variables, savoir $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, forme qui présentera dès lors un nombre de termes ou de coefficients distincts A_{ij} égal à $\frac{3.4.5}{1.2.3} = 10$, qu'il s'agit de déterminer en fonction du paramètre λ, de façon que l'équation $\Lambda = 0$ représente une famille isotherme.

Si nous désignons en outre par k (ou bien k', ou k'') un nouvel indice recevant les seules valeurs 1, 2, 3, à l'exclusion de 0, et par $\mathbf{S}$, au lieu de $\sum$, le signe de sommation affecté à cet indice, notre équation générale (53), qu'il s'agit de former, pourra être écrite :

$$\Lambda' \left(\Lambda' \mathbf{S} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k^2} - 2 \mathbf{S} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} \frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k} \right) + (\Lambda'' + T\Lambda'). \mathbf{S} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} \right)^2 = 0.$$

Or il est clair que l'expression (1) donnera, en tenant compte de la condition $A_{ij} = A_{ji}$,

$$(2) \qquad \Lambda' = \sum_i \sum_j A'_{ij} x_i x_j, \qquad \Lambda'' = \sum_i \sum_j A''_{ij} x_i x_j,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} = \sum_j A_{kj} x_j + \sum_i A_{ki} x_i = 2 \sum_i A_{ik} x_i, \qquad \frac{\partial^2 \Lambda}{d x_k^2} = 2 A_{kk},$$

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} \right)^2 = 4 \left(\sum_i A_{ik} x_i \right)^2 = 4 \left(\sum_i A_{ik} x_i \right) \left(\sum_j A_{jk} x_j \right) = 4 \sum_i \sum_j A_{ik} A_{jk} x_i x_j,$$

et que l'on aura par suite, en introduisant une inconnue auxiliaire S, et faisant la somme des expressions précédentes,

$$(4)\qquad \mathbf{S}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k^2} = 2\,\mathbf{S}\,A_{kk} = 2\,(A_{11} + A_{22} + A_{33}) = 2\,S,$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{S}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\right)^2 &= 4\,\mathbf{S}\sum_i\sum_j A_{ik}A_{jk}x_ix_j = 4\sum_i\sum_j\left(\mathbf{S}\,A_{ik}A_{jk}\right)x_ix_j \\ &= 4\sum_i\sum_j \mathcal{A}_{ij}x_ix_j, \end{aligned}\right.$$

en convenant de poser, pour faciliter l'écriture,

$$(6)\qquad \mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji} = \mathbf{S}\,A_{ik}A_{jk} = A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3},$$

d'où l'on tirera ensuite par la différentiation

$$\mathcal{A}'_{ij} = \mathbf{S}\,(A_{ik}\,A'_{jk} + A'_{ik}A_{jk}).$$

Enfin, on déduira encore des expressions ci-dessus (3) et (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\,\frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k} = 2\left(\sum_i A_{ik}x_i\right)2\left(\sum_j A'_{jk}x_j\right) &= 4\sum_i\sum_j A_{ik}A'_{jk}x_ix_j \\ &= 2\sum_i\sum_j (A_{ik}A'_{jk} + A_{jk}A'_{ik})x_ix_j, \end{aligned}$$

et par suite on obtiendra, en ajoutant les trois expressions semblables, et tenant compte de la relation immédiatement précédente,

$$(7)\qquad \mathbf{S}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\,\frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k} = 2\sum_i\sum_j \mathbf{S}\,(A_{ik}A'_{jk} + A'_{ik}A_{jk})x_ix_j = 2\sum_i\sum_j \mathcal{A}'_{ij}x_ix_j.$$

Cela fait, les expressions (2), (4), et (7) donneront en conséquence

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Lambda'\,\mathbf{S}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k^2} - 2\,\mathbf{S}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\,\frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k} \\ &= \left(\sum_i\sum_j A'_{ij}x_ix_j\right)2S - 4\sum_i\sum_j \mathcal{A}'_{ij}x_ix_j = 2\sum_i\sum_j (SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij})x_ix_j. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les expressions (2) pouvant aussi bien être écrites ainsi

$$(9) \qquad \Lambda' = \sum_{i'} \sum_{j'} A'_{i'j'} x_{i'} x_{j'}, \qquad \Lambda'' = \sum_{i'} \sum_{j'} A''_{i'j'} x_{i'} x_{j'},$$

on en conclura

$$(10) \qquad \Lambda'' + T\Lambda' = \sum_{i'} \sum_{j'} (A''_{i'j'} + TA'_{i'j'}) x_{i'j'},$$

et l'on obtiendra par suite, en substituant les valeurs (9), (8), (10), et (5) dans l'équation à former (53), pour cette équation elle-même

$$\sum_{i'} \sum_{j'} A'_{i'j'} x_{i'} x_{j'} \cdot 2 \sum_{i} \sum_{j} (SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij}) x_i x_j$$
$$+ \sum_{i'} \sum_{j'} (A''_{i'j'} + TA'_{i'j'}) x_{i'} x_{j'} \cdot 4 \sum_{i} \sum_{j} \mathcal{A}_{ij} x_i x_j = 0,$$

ou en divisant par 2, et réunissant tous les termes en une seule somme quadruple,

$$\sum_{i} \sum_{j} \sum_{i'} \sum_{j'} \left[A'_{i'j'} (SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij}) + 2(A''_{i'j'} + TA'_{i'j'}) \mathcal{A}_{ij} \right] x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0,$$

équation qui, en posant, pour abréger,

$$(11) \qquad P_{ij}^{(i'j')} = A'_{i'j'} (SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij}) + 2(A''_{i'j'} + TA'_{i'j'}) \mathcal{A}_{ij},$$

pouvant évidemment être écrite indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\sum_{i} \sum_{j} \sum_{i'} \sum_{j'} P_{ij}^{(i'j')} x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0, \qquad \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{i} \sum_{j} P_{i'j'}^{(ij)} x_{i'} x_{j'} x_i x_j = 0,$$

offrira une forme encore plus symétrique, et dont nous reconnaîtrons tout à l'heure l'avantage, si nous l'écrivons, en la doublant, sous celle-ci

$$\sum_{i} \sum_{j} \sum_{i'} \sum_{j'} (P_{ij}^{(i'j')} + P_{i'j'}^{(ij)}) x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0,$$

ou, en abrégé,

$$(12) \qquad \sum_{i} \sum_{j} \sum_{i'} \sum_{j'} \mathfrak{P}_{iji'j'} x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0, \qquad (i, j, i', j' = 0, 1, 2, 3)$$



en convenant de poser de nouveau

$$(13) \qquad \mathfrak{P}_{iji'j'} = P_{ij}^{(i'j')} + P_{i'j'}^{(ij)},$$

forme qui représentera donc définitivement pour nous l'équation générale (33) dans la question actuelle, et dont tous les coefficients correspondant à des termes distincts en x, y, et z devront en conséquence être égalés séparément à zéro.

Le premier membre de cette dernière équation étant alors une forme à quatre variables (ou un polynôme complet en x, y, z) du quatrième degré, le nombre N des termes distincts sera de $\frac{5.6.7}{1.2.3} = 5 \times 7 = 35$. Les dix coefficients A_{ij} de la forme A seront donc ainsi astreints, par notre méthode, à vérifier un système de 35 équations différentielles du second ordre, linéaires par rapport aux dérivées secondes, lesquelles pourront être remplacées par un système formé de $n = 10$ équations du second ordre seulement, et de $N - n = 25$ autres du premier ordre, obtenues par l'élimination des 10 dérivées secondes entre ces 35 équations. Les dix inconnues A_{ij} seront donc déterminées, si l'on se trouve dans le cas le plus général, par la condition de satisfaire en premier lieu à un système formé de dix de ces équations du premier ordre en particulier, d'où déjà la certitude que l'ensemble des expressions les plus générales de ces inconnues ne pourra comporter plus de dix constantes arbitraires, et il faudra ensuite que les mêmes valeurs, supposées ainsi obtenues, vérifient également, outre les quinze autres équations du premier ordre, les dix du second ordre que l'on aura préalablement mises à part pour l'élimination des dérivées secondes, c'est-à-dire en somme, l'ensemble des trente-cinq équations proposées (pp. 63-64).

Or, parmi ces trente-cinq équations du second ordre, que nous avons ainsi tout d'abord à considérer, il en est quatre que nous pouvons écrire immédiatement, et dont une intégrale première, facile à apercevoir à première vue, nous mettra très aisément sur la voie de ce système de dix équations du premier ordre propres à déterminer les inconnues, et dont la solution doit être telle qu'elle vérifie à la fois l'ensemble des trente-cinq équations proposées.

En effet, tandis qu'en général, pour un terme déterminé quelconque $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, le coefficient de ce terme sera composé d'un nombre plus ou moins considérable de quantités $\mathfrak{P}_{iji'j'}$ différentes, formées successivement en prenant de toutes les manières possibles les quatre indices i, j, i', j', de façon que le produit $x_i x_j x_{i'} x_{j'}$ représente toujours le terme donné $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, en sorte que la forme générale de nos trente-cinq équations précitées pourra être figurée par

$$(14) \qquad \sum \mathfrak{P}_{iji'j'} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \sum (P_{ij}^{(i'j')} + P_{i'j'}^{(ij)}) = 0,$$

il y aura quatre termes particuliers pour lesquels ces coefficients ne comprendront évidemment chacun qu'une seule quantité $\mathfrak{P}_{iji'j'}$; ce sont ceux pour lesquels les quatre indices i, j, i', j' sont tous égaux entre eux, et qui correspondent par conséquent au terme constant de l'équation $A = 0$, et aux trois termes en x^4, y^4, et z^4.

Les quatre équations, formées en égalant ces quatre coefficients à zéro, seront donc représentées par

$$\mathfrak{P}_{iiii} = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2 P_{ii}^{(ii)} = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'égalité de définition (11),

$$A'_{ii}(SA'_{ii} - 2\mathcal{A}'_{ii}) + 2(A''_{ii} + TA'_{ii})\mathcal{A}_{ii} = 0,$$

ou, en disposant de la fonction arbitraire T en faisant, en vue d'une simplification évidente, $2T = S$, puis ordonnant,

$$SA'_{ii}(A'_{ii} + \mathcal{A}_{ii}) + 2(A''_{ii}\mathcal{A}_{ii} - A'_{ii}\mathcal{A}'_{ii}) = 0,$$

équation que l'on pourra écrire, en ajoutant et retranchant le terme $2A'_{ii}A''_{ii}$,

$$SA'_{ii}(A'_{ii} + \mathcal{A}_{ii}) + 2\left[A''_{ii}(\mathcal{A}_{ii} + A'_{ii}) - A'_{ii}(\mathcal{A}'_{ii} + A''_{ii})\right] = 0,$$

et à laquelle dès lors on aperçoit de suite que l'on satisfera en faisant simplement

$$A'_{ii} + \mathcal{A}_{ii} = 0. \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Or, cette solution si simple va nous conduire très aisément, par une induction toute naturelle, au système du premier ordre que nous avons à chercher; car si l'on essaye de faire subir à nos quantités $\mathfrak{P}_{iji'j'}$, définies par l'égalité (13) et (11), une transformation semblable, savoir, en mettant d'abord en facteur $S = 2T$ dans l'expression (11) des $P_{ij}^{(i'j')}$, ce qui donnera

$$P_{ij}^{(i'j')} = SA'_{i'j'}(A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij}) + 2(A''_{i'j'}\mathcal{A}_{ij} - A'_{i'j'}\mathcal{A}'_{ij}),$$

puis, en ajoutant et retranchant de même les deux termes $A'_{ij}A''_{i'j'}$ et $A'_{i'j'}A''_{ij}$,

$$P_{ij}^{(i'j')} = SA'_{i'j'}(A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij}) + 2\left[A''_{i'j'}(\mathcal{A}_{ij} + A'_{ij}) - A'_{ij}A''_{i'j'} - A'_{i'j'}(\mathcal{A}'_{ij} + A''_{ij}) + A'_{i'j'}A''_{ij}\right],$$

et par conséquent aussi, en permutant les deux groupes (ij), $(i'j')$,

$$P_{i'j'}^{(ij)} = SA'_{ij}(A'_{i'j'} + \mathcal{A}_{i'j'}) + 2\left[A''_{ij}(\mathcal{A}_{i'j'} + A'_{i'j'}) - A'_{i'j'}A''_{ij} - A'_{ij}(\mathcal{A}'_{i'j'} + A''_{i'j'}) + A'_{ij}A''_{i'j'}\right],$$

on aura donc, eu égard à la définition (13), en ajoutant ces deux dernières égalités, et négligeant les termes qui se détruisent,

$$\mathfrak{P}_{iji'j'} = P_{ij}^{(i'j')} + P_{i'j'}^{(ij)} = S\left[A'_{i'j'}(A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij}) + A'_{ij}(A'_{i'j'} + \mathcal{A}_{i'j'})\right]$$
$$+ 2\left[A''_{i'j'}(\mathcal{A}_{ij}+A'_{ij}) - A'_{i'j'}(\mathcal{A}'_{ij}+A''_{ij}) + A''_{ij}(\mathcal{A}_{i'j'}+A'_{i'j'}) - A'_{ij}(\mathcal{A}'_{i'j'}+A''_{i'j'})\right],$$

et par conséquent l'on voit que si l'on fait simplement

$$A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A'_{i'j'} + \mathcal{A}_{i'j'} = 0,$$

ce qui entraînera

$$A''_{ij} + \mathcal{A}'_{ij} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A''_{i'j'} + \mathcal{A}'_{i'j'} = 0,$$

toutes les quantités $\mathfrak{P}_{iji'j'}$ devenant nulles individuellement, on aura satisfait à la fois à nos trente-cinq équations proposées, puisqu'elles sont toutes, comme nous l'avons reconnu, de la forme (14).



Le type simple

$$(15) \qquad A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A'_{ij} = -\mathcal{A}_{ij}, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3.)$$

qui, en raison des deux conditions $A_{ij} = A_{ji}$ et $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}$, représente dix équations distinctes (au lieu de seize), constitue donc, en y remettant à la place des $\mathcal{A}_{ij}$ leurs valeurs de définition (6), un système *normal* de dix équations simultanées du premier ordre entre les dix inconnues A_{ij}, système dont l'intégrale générale, contenant dix constantes arbitraires, et vérifiant à la fois, ainsi qu'on vient de le voir, nos trente-cinq équations proposées, représente évidemment dès lors la solution la plus générale du problème que nous cherchons, laquelle est déterminée précisément, comme nous l'avons dit plus haut (p. 5), par la double condition, de vérifier ces trente-cinq équations et de renfermer le même nombre de constantes arbitraires.

La question est donc réduite désormais à trouver l'intégrale générale de ce nouveau système (15) de dix équations du premier ordre, qui, malgré qu'il ne soit pas linéaire, peut néanmoins être intégré, en ayant recours encore, comme dans le cas d'un système linéaire, à une transformation linéaire des inconnues.

A cet effet, désignant par $\alpha_j^{(i)}$ seize constantes provisoirement arbitraires, nous introduirons comme inconnues auxiliaires les seize quantités

$$(16) \qquad \mathcal{A}_j^{(i)} = \mathbf{S}\alpha_k^{(i)} A_{jk} = \alpha_1^{(i)} A_{j1} + \alpha_2^{(i)} A_{j2} + \alpha_3^{(i)} A_{j3},$$

qui se déduisent des fonctions $\mathcal{A}_{ij}$ suivant une loi très simple, savoir, en remplaçant dans leur expression (6) le facteur variable A_{ik} par la constante $\alpha_k^{(i)}$, et qui sont dès lors linéaires par rapport aux inconnues actuelles A_{ik} ou A_{jk}.

Pour cela, faisant successivement $j = 1, j = 2, j = 3$ dans l'équation ci-dessus (15), nous formerons tout d'abord les trois équations

$$A'_{i1} + \mathcal{A}_{i1} = 0, \qquad A'_{i2} + \mathcal{A}_{i2} = 0, \qquad A'_{i3} + \mathcal{A}_{i3} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en séparant en deux membres, et remettant à la place des $\mathcal{A}_{ik}$, leurs valeurs de définition (6) :

$$\left\{\begin{aligned} -A'_{i1} &= A_{i1}A_{11} + A_{i2}A_{12} + A_{i3}A_{13}, \\ -A'_{i2} &= A_{i1}A_{21} + A_{i2}A_{22} + A_{i3}A_{23}, \\ -A'_{i3} &= A_{i1}A_{31} + A_{i2}A_{32} + A_{i3}A_{33}. \end{aligned}\right.$$

Si alors, multipliant ces équations respectivement par $\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}$ et les ajoutant par colonnes verticales, nous avons égard à la définition (16) de nos inconnues auxiliaires, en tenant compte de la condition $A_{ij} = A_{ji}$, nous formerons ainsi cette nouvelle équation

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} -(\alpha_1^{(j)}A'_{i1} + \alpha_2^{(j)}A'_{i2} + \alpha_3^{(j)}A'_{i3}) &= A_{i1}(\alpha_1^{(j)}A_{11} + \alpha_2^{(j)}A_{21} + \alpha_3^{(j)}A_{31}) \\ + A_{i2}(\alpha_1^{(j)}A_{12} + \alpha_2^{(j)}A_{22} + \alpha_3^{(j)}A_{32}) &+ A_{i3}(\alpha_1^{(j)}A_{13} + \alpha_2^{(j)}A_{23} + \alpha_3^{(j)}A_{33}) \\ &= A_{i1}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{i2}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{i3}\mathcal{A}_3^{(j)}, \end{aligned}\right.$$

que nous écrirons semblablement trois fois, en y faisant successivement $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, ce qui nous donnera :

$$\left\{\begin{aligned} -(\alpha_1^{(j)}A'_{11} + \alpha_2^{(j)}A'_{12} + \alpha_3^{(j)}A'_{13}) &= A_{11}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{12}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{13}\mathcal{A}_3^{(j)}, \\ -(\alpha_1^{(j)}A'_{21} + \alpha_2^{(j)}A'_{22} + \alpha_3^{(j)}A'_{23}) &= A_{21}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{22}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{23}\mathcal{A}_3^{(j)}, \\ -(\alpha_1^{(j)}A'_{31} + \alpha_2^{(j)}A'_{32} + \alpha_3^{(j)}A'_{33}) &= A_{31}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{32}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{33}\mathcal{A}_3^{(j)}. \end{aligned}\right.$$

Puis, multipliant de même ces trois dernières équations respectivement par $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)}$ et les ajoutant encore par colonnes verticales, nous formerons celles-ci :

$$\begin{aligned} &-\alpha_1^{(j)}(\alpha_1^{(i)}A'_{11} + \alpha_2^{(i)}A'_{21} + \alpha_3^{(i)}A'_{31}) - \alpha_2^{(j)}(\alpha_1^{(i)}A'_{12} + \alpha_2^{(i)}A'_{22} + \alpha_3^{(i)}A'_{32}) \\ &-\alpha_3^{(j)}(\alpha_1^{(i)}A'_{13} + \alpha_2^{(i)}A'_{23} + \alpha_3^{(i)}A'_{33}) = (\alpha_1^{(i)}A_{11} + \alpha_2^{(i)}A_{21} + \alpha_3^{(i)}A_{31})\mathcal{A}_1^{(j)} \\ &\quad + (\alpha_1^{(i)}A_{12} + \alpha_2^{(i)}A_{22} + \alpha_3^{(i)}A_{32})\mathcal{A}_2^{(j)} + (\alpha_1^{(i)}A_{13} + \alpha_2^{(i)}A_{23} + \alpha_3^{(i)}A_{33})\mathcal{A}_3^{(j)}. \end{aligned}$$

Et, si enfin nous introduisons de nouveau dans l'équation ainsi obtenue nos nouvelles inconnues (16), nous formerons définitivement la suivante, qui tient lieu de douze équations entre les douze inconnues $\mathcal{A}_k^{(i)}$,

$$(18)\qquad -\alpha_1^{(j)}(\mathcal{A}_1^{(i)})' - \alpha_2^{(j)}(\mathcal{A}_2^{(i)})' - \alpha_3^{(j)}(\mathcal{A}_3^{(i)})' = \mathcal{A}_1^{(i)}\mathcal{A}_1^{(j)} + \mathcal{A}_2^{(i)}\mathcal{A}_2^{(j)} + \mathcal{A}_3^{(i)}\mathcal{A}_3^{(j)},$$

analogue aux équations (15) et encore non linéaire comme elles, mais plus facile à intégrer, comme on va le voir en disposant convenablement des constantes arbitraires $\alpha_k^{(j)}$.

En effet, faisant tout d'abord $i = j$, et remarquant que l'équation

$$-\alpha_1^{(i)}(\mathcal{A}_1^{(i)})' - \alpha_2^{(i)}(\mathcal{A}_2^{(i)})' - \alpha_3^{(i)}(\mathcal{A}_3^{(i)})' = (\mathcal{A}_1^{(i)})^2 + (\mathcal{A}_2^{(i)})^2 + (\mathcal{A}_3^{(i)})^2$$

peut alors être satisfaite en faisant séparément pour $k = 1, 2, 3$,

$$-\alpha_k^{(i)}(\mathcal{A}_k^{(i)})' = (\mathcal{A}_k^{(i)})^2 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{(\mathcal{A}_k^{(i)})'}{(\mathcal{A}_k^{(i)})^2} = \frac{1}{\alpha_k^{(i)}},$$

équation immédiatement intégrable, qui donne en désignant par $a_i^{(k)}$ la constante d'intégration,

$$\frac{1}{\mathcal{A}_k^{(i)}} = \frac{1}{\alpha_k^{(i)}}(\lambda + a_i^{(k)}), \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A}_k^{(i)} = \frac{\alpha_k^{(i)}}{\lambda + a_i^{(k)}},$$

on se trouve tout naturellement conduit à essayer de satisfaire également avec cette même expression des $\mathcal{A}_k^{(i)}$ aux équations (18) elles-mêmes.

A cet effet, essayant tout d'abord, en vue de faciliter l'identification, de prendre dans ce but toutes les constantes $a_i^{(k)}$ introduites en dernier lieu égales entre elles, en faisant $a_i^{(1)} = a_i^{(2)} = a_i^{(3)} = a_i$, ce qui donnera à la place de l'expression qui précède, pour les $\mathcal{A}_k^{(i)}$ et leurs dérivées, les suivantes

(19) $$\mathcal{A}_k^{(i)} = \frac{\alpha_k^{(i)}}{\lambda + a_i}, \qquad (\mathcal{A}_k^{(i)})' = -\frac{\alpha_k^{(i)}}{(\lambda + a_i)^2},$$

et reportant ces dernières valeurs dans l'équation (18), nous aurons, en remarquant que les dénominateurs deviennent alors communs pour chaque membre séparément,

$$\frac{\alpha_1^{(j)}\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(j)}\alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(j)}\alpha_3^{(i)}}{(\lambda + a_i)^2} = \frac{\alpha_1^{(i)}\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(i)}\alpha_2^{(j)} + \alpha_3^{(i)}\alpha_3^{(j)}}{(\lambda + a_i)(\lambda + a_j)},$$

ou, ce qui est la même chose, en faisant passer tous les termes dans un même membre, et mettant en évidence les fonctions connues

$$\left(\frac{1}{\lambda + a_i} - \frac{1}{\lambda + a_j}\right) \mathbf{S} \frac{\alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)}}{\lambda + a_i} = 0,$$

ou définitivement

$$\frac{a_j - a_i}{(\lambda + a_i)^2(\lambda + a_j)} \mathbf{S}\, \alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)} = 0;$$

et, par conséquent, cette équation étant satisfaite d'elle-même, comme nous le savions déjà, pour $i = j$, il suffira pour qu'elle le soit également pour toutes les valeurs de i et de j, que l'on fasse en outre, pour toutes les valeurs différentes de i et de j,

$$(20) \qquad \mathbf{S}\, \alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha_1^{(i)}\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(i)}\alpha_2^{(j)} + \alpha_3^{(i)}\alpha_3^{(j)} = 0;$$

c'est-à-dire explicitement, en attribuant d'abord à i et j les valeurs 1, 2, 3,

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(2)}\alpha_3^{(3)} &= 0, \\ \alpha_1^{(3)}\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(3)}\alpha_3^{(1)} &= 0, \\ \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(2)} &= 0, \end{aligned}\right.$$

puis, en attribuant enfin à j la valeur 0, et à i successivement les valeurs 1, 2, 3,

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(0)} &= 0, \\ \alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(2)}\alpha_3^{(0)} &= 0, \\ \alpha_1^{(3)}x_1^{(0)} + \alpha_2^{(3)}\alpha_2^{(0)} + x_3^{(3)}\alpha_3^{(0)} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ce premier résultat obtenu, revenant maintenant à nos dix équations (15), nous observerons que l'on peut faire de ces équations trois parts, correspondant aux différents degrés des termes de l'équation de la surface proposée, et dont chacune s'intégrera successivement à l'aide d'un procédé différent, savoir :

a) La première, dans laquelle les deux indices i et j ne recevront que les seules valeurs 1, 2, 3, que nous pourrons donc, conformément à la notation usitée dans ce qui précède, figurer avec plus de précision par la formule

$$A'_{kk'} + \mathcal{A}_{kk'} = 0, \tag{22}$$

et qui formera un système complet non linéaire, entre les inconnues $A_{kk'}$, qui sont les coefficients des termes du second degré dans l'équation de la famille de surfaces proposée ;

b) La seconde, dans laquelle l'un des indices recevra la valeur 0, l'autre indice prenant encore successivement les valeurs 1, 2, 3, que nous pourrons figurer semblablement, eu égard à la définition des $\mathcal{A}_{ij}$, par l'une ou l'autre des formules

$$A'_{k0} + \mathcal{A}_{k0} = 0, \quad \text{ou} \quad A'_{0k} + A_{k1}A_{01} + A_{k2}A_{02} + A_{k3}A_{03} = 0, \tag{23}$$

qui comprendra donc trois équations, et qui, en supposant les six inconnues $A_{kk'}$ déterminées à l'aide du système précédent (22), constituera un autre système complet, mais linéaire cette fois, entre les trois autres inconnues A_{0k} qui sont les coefficients des termes du premier degré dans l'équation proposée ;

c) Enfin la dernière, qui ne comprendra que la seule équation pour laquelle i et j reçoivent simultanément la valeur 0, savoir

$$A'_{00} + \mathcal{A}_{00} = 0, \quad \text{ou} \quad A'_{00} + (A_{01})^2 + (A_{02})^2 + (A_{03})^2 = 0, \tag{24}$$

et qui, en supposant les trois inconnues A_{0k} déterminées à l'aide du système précédent (23), fournira alors l'expression de la dernière inconnue A_{00}, c'est-à-dire le terme constant de l'équation de la famille de surfaces, à l'aide d'une simple quadrature seulement, et, par conséquent, avec une constante simplement additive.

Occupons-nous donc d'abord du premier système (22). Si, restreignant à cet effet, dans la formule de définition (16) et dans l'équation (18), les deux indices i et j aux seules valeurs 1, 2, 3, et les récrivant en conséquence, pour plus de clarté, sous les



formes suivantes

$$(25)\qquad \mathcal{A}_k^{(k')} = \alpha_1^{(k')} A_{k1} + \alpha_2^{(k')} A_{k2} + \alpha_3^{(k')} A_{k3},$$

$$(26)\qquad -\alpha_1^{(k')}(\mathcal{A}_1^{(k)})' - \alpha_2^{(k')}(\mathcal{A}_2^{(k)})' - \alpha_3^{(k')}(\mathcal{A}_3^{(k)})' = \mathcal{A}_1^{(k')}\mathcal{A}_1^{(k)} + \mathcal{A}_2^{(k)}\mathcal{A}_2^{(k')} + \mathcal{A}_3^{(k)}\mathcal{A}_3^{(k')},$$

chacune de ces deux formules tiendra lieu de neuf équations ; la seconde représentera donc un système complet du premier ordre, non linéaire, entre les neuf inconnues $\mathcal{A}_k^{(k')}$, système dont une solution sera fournie, d'après ce qui précède, par l'expression (19), dans laquelle on aura fait aussi $i = k'$, savoir :

$$(27)\qquad \mathcal{A}_k^{(k')} = \frac{\alpha_k^{(k')}}{\lambda + a_{k'}}.$$

Or, nous pourrons évidemment, dans le système des six équations (22), considérer $A_{kk'}$ et $A_{k'k}$ comme des inconnues distinctes, à la condition d'adjoindre à ce système les trois équations complémentaires $A_{kk'} = A_{k'k}$, et nous aurons alors dans cette hypothèse à considérer, au lieu des six équations (22), le système équivalent des neuf équations

$$(28)\qquad A'_{kk'} + A_{k1}A_{k'1} + A_{k2}A_{k'2} + A_{k3}A_{k'3} = 0, \qquad A_{kk'} = A_{k'k},$$

entre les neuf inconnues $A_{kk'}$, ainsi entendues. Or, il ressort manifestement de la manière dont nous avons formé l'équation (18), d'où nous avons déduit comme cas particulier l'équation (26), que le système des neuf équations figurées par cette même équation (26) entre les neuf inconnues $\mathcal{A}_k^{(k')}$ forme un système complètement équivalent à ce dernier système (28) entre les inconnues $A_{kk'}$, car il est formé d'un même nombre d'équations entre pareil nombre d'inconnues, les dites équations étant formées chacune par une simple combinaison linéaire de ces mêmes équations (28). Ces deux systèmes (26) et (28) étant donc équivalents, les solutions connues (27) du premier système, étant reportées dans le second, le vérifieront nécessairement; c'est-à-dire que si, exprimant par le moyen des relations linéaires (25) les $A_{kk'}$ au moyen des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, nous remettons ensuite, dans ces mêmes expressions, à la place des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, leurs valeurs (27)

qui satisfont aux équations (26), les valeurs des $A_{kk'}$ ainsi obtenues vérifieront nécessairement le système (28).

Pour calculer ces mêmes valeurs, il n'y aura donc qu'à faire successivement $k' = 1, 2, 3$ dans la formule ci-dessus (25), ce qui nous donnera, en intervertissant les deux membres, les trois équations

$$(29) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{(1)} A_{k1} + \alpha_2^{(1)} A_{k2} + \alpha_3^{(1)} A_{k3} = \mathcal{A}_k^{(1)}, \\ \alpha_1^{(2)} A_{k1} + \alpha_2^{(2)} A_{k2} + \alpha_3^{(2)} A_{k3} = \mathcal{A}_k^{(2)}, \\ \alpha_1^{(3)} A_{k1} + \alpha_2^{(3)} A_{k2} + \alpha_3^{(3)} A_{k3} = \mathcal{A}_k^{(3)}, \end{array} \right.$$

dans lesquelles il faudra supposer remises aux seconds membres, à la place des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, les valeurs fournies par l'expression (27) pour $k' = 1, 2, 3$, et à résoudre ensuite ce dernier système par rapport aux $A_{kk'}$. Or les trois relations (21), qui existent par hypothèse entre les coefficients de ce système linéaire, c'est-à-dire les neuf constantes $\alpha_k^{(k')}$, vont nous permettre d'écrire les valeurs ainsi obtenues sous une forme beaucoup plus simple que celle sous laquelle elles se présentent ainsi de prime abord.

En effet, les deux dernières de ces équations (21), qui sont, en intervertissant leur ordre et celui des facteurs de la troisième,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{(2)} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(2)} \alpha_3^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(3)} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)} \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(3)} \alpha_3^{(1)} = 0, \end{array} \right.$$

pouvant être mises aussi bien sous la forme

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(2)}\alpha_2^{(3)}} = \frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(3)}} = \frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(2)}\alpha_1^{(3)}}$$

$$= \frac{(\alpha_1^{(1)})^2 + (\alpha_2^{(1)})^2 + (\alpha_3^{(1)})^2}{\Delta} = \frac{S^{(1)}}{\Delta},$$

en convenant de poser, pour faciliter les écritures,

$$(30) \qquad S^{(k)} = (\alpha_1^{(k)})^2 + (\alpha_2^{(k)})^2 + (\alpha_3^{(k)})^2, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} \\ \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} \end{vmatrix},$$

fournissent, par suite, immédiatement le premier des trois groupes d'égalités qui suivent

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} \alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(2)}\alpha_2^{(3)} = \dfrac{\Delta\alpha_1^{(1)}}{S^{(1)}}, \\ \alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(3)} = \dfrac{\Delta\alpha_2^{(1)}}{S^{(1)}}, \\ \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(2)}\alpha_1^{(3)} = \dfrac{\Delta\alpha_3^{(1)}}{S^{(1)}}, \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} \alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(1)} - \alpha_3^{(3)}\alpha_2^{(1)} = \dfrac{\Delta\alpha_1^{(2)}}{S^{(2)}}, \\ \alpha_3^{(3)}\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(3)}\alpha_3^{(1)} = \dfrac{\Delta\alpha_2^{(2)}}{S^{(2)}}, \\ \alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(3)}\alpha_1^{(1)} = \dfrac{\Delta\alpha_3^{(2)}}{S^{(2)}}, \end{array}\right. \\ & \left\{\begin{array}{l} \alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(2)} - \alpha_3^{(1)}\alpha_2^{(2)} = \dfrac{\Delta\alpha_1^{(3)}}{S^{(3)}}, \\ \alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(2)} - \alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(2)} = \dfrac{\Delta\alpha_2^{(3)}}{S^{(3)}}, \\ \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(1)}\alpha_1^{(2)} = \dfrac{\Delta\alpha_3^{(3)}}{S^{(3)}}, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

ces trois groupes s'obtenant évidemment par un procédé semblable, en prenant ainsi successivement deux à deux les trois relations (21), et les traitant à chaque fois d'une façon analogue.

En outre, en multipliant respectivement par $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_1^{(3)}$ la première égalité de chacun des trois groupes, et les ajoutant, nous formerons encore cette autre équation

$$\Delta = \Delta\left[\frac{(\alpha_1^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \frac{(\alpha_1^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \frac{(\alpha_1^{(3)})^2}{S^{(3)}}\right],$$

et, par conséquent, en divisant par Δ, et renversant les deux membres, nous obtiendrons de cette façon successivement, par la considération des équations de même rang de chacun des trois groupes, les trois nouvelles égalités :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(\alpha_1^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \dfrac{(\alpha_1^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \dfrac{(\alpha_1^{(3)})^2}{S^{(3)}} = 1, \\ \dfrac{(\alpha_2^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \dfrac{(\alpha_2^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \dfrac{(\alpha_2^{(3)})^2}{S^{(3)}} = 1, \\ \dfrac{(\alpha_3^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \dfrac{(\alpha_3^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \dfrac{(\alpha_3^{(3)})^2}{S^{(3)}} = 1. \end{array}\right.$$

Le tableau qui précède (31) nous fournissant ainsi une expression concise de chacun des neuf déterminants mineurs du déterminant Δ (30), qui est le dénominateur commun des valeurs demandées des $A_{kk'}$, fournies par le système (29), il est clair qu'en tenant compte de ces expressions, ces dernières valeurs s'écriront simplement

$$\left\{\begin{aligned} A_{k1} &= \frac{\alpha_1^{(1)}}{S^{(1)}}\mathcal{A}_k^{(1)} + \frac{\alpha_1^{(2)}}{S^{(2)}}\mathcal{A}_k^{(2)} + \frac{\alpha_1^{(3)}}{S^{(3)}}\mathcal{A}_k^{(3)},\\ A_{k2} &= \frac{\alpha_2^{(1)}}{S^{(1)}}\mathcal{A}_k^{(1)} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{S^{(2)}}\mathcal{A}_k^{(2)} + \frac{\alpha_2^{(3)}}{S^{(3)}}\mathcal{A}_k^{(3)},\\ A_{k3} &= \frac{\alpha_3^{(1)}}{S^{(1)}}\mathcal{A}_k^{(1)} + \frac{\alpha_3^{(2)}}{S^{(2)}}\mathcal{A}_k^{(2)} + \frac{\alpha_3^{(3)}}{S^{(3)}}\mathcal{A}_k^{(3)}, \end{aligned}\right.$$

expressions dans lesquelles les $\mathcal{A}_k^{(k')}$ représentent par hypothèse les valeurs (27), qu'on pourra, en conséquence, en faisant la substitution, comprendre dans la formule unique

$$A_{kk'} = \frac{\alpha_k^{(1)}\alpha_{k'}^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_k^{(2)}\alpha_{k'}^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_k^{(3)}\alpha_{k'}^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)},$$

ou, ce qui est la même chose, sous forme condensée,

$$(33) \qquad A_{kk'} = \underset{k''}{\mathrm{S}} \frac{\alpha_k^{(k'')}\alpha_{k'}^{(k'')}}{S^{(k'')}(\lambda + a_{k''})},$$

et qui satisfont bien, comme on le voit, ainsi que cela devait être, à la condition $A_{kk'} = A_{k'k}$.

Telle est donc, nous en sommes assurés rigoureusement par les raisonnements qui précèdent, la solution du système (28) ou des équations (22). Une fois en possession de ce résultat, pour obtenir semblablement celle du second système (23), il nous serait facile, par l'application itérative des mêmes procédés, de ramener son intégration, comme celle de la dernière équation (24), à de simples quadratures, ce qui achèverait de déterminer

complètement les inconnues (*). Toutefois, le calcul de la dernière de ces quadratures, bien que n'offrant aucune difficulté, exigeant néanmoins un certain développement, une voie plus rapide, basée encore sur une induction rationnelle, et qui aura l'avantage de fournir, en outre, une vérification complète des calculs et des raisonnements précédents, nous dispensera de passer par tous ces intermédiaires, et nous conduira directement sans peine au même but, en étendant simplement aux indices i et j, dans toute leur généralité, le résultat auquel nous venons de parvenir pour les indices k et k' seulement, c'est-à-dire en essayant s'il ne serait pas possible de satisfaire à l'ensemble des dix équations proposées (15) avec les dix expressions

$$(34) \qquad A_{ij} = A_{ji} = \mathrm{S} \frac{\alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)}}{\mathrm{S}^{(k)}(\lambda + a_k)}, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

(*) En effet, si, nous reportant à notre équation (17), nous y faisons $i = 0$ et $j = k'$, elle deviendra, en faisant abstraction du membre intermédiaire,

$$-(\alpha_1^{(k')} A'_{01} + \alpha_2^{(k')} A'_{02} + \alpha_3^{(k')} A'_{03}) = A_{01} \mathcal{A}_1^{(k')} + A_{02} \mathcal{A}_2^{(k')} + A_{03} \mathcal{A}_3^{(k')},$$

ou, en y remplaçant au second membre les $\mathcal{A}_i^{(k')}$ par leurs valeurs obtenues tout à l'heure (27),

$$(\alpha) \quad -(\alpha_1^{(k')} A'_{01} + \alpha_2^{(k')} A'_{02} + \alpha_3^{(k')} A'_{03}) = \frac{1}{\lambda + a_{k'}} (\alpha_1^{(k')} A_{01} + \alpha_2^{(k')} A_{02} + \alpha_3^{(k')} A_{03}).$$

Or, si nous avons égard à présent à la définition (16) des $\mathcal{A}_j^{(i)}$, laquelle donne, en y faisant $j = 0$, et $i = k'$,

$$(6) \qquad \mathcal{A}_0^{(k')} = \alpha_1^{(k')} A_{01} + \alpha_2^{(k')} A_{02} + \alpha_3^{(k')} A_{03},$$

l'équation que nous venons d'écrire (α) équivaudra à la suivante

$$-(\mathcal{A}_0^{(k')})' = \frac{\mathcal{A}_0^{(k')}}{\lambda + a_{k'}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{(\mathcal{A}_0^{(k')})'}{\mathcal{A}_0^{(k')}} = \frac{-1}{\lambda + a_{k'}},$$

et donnera, en intégrant,

$$l \mathcal{A}_0^{(k')} = -l(\lambda + a_{k'}) + l\alpha_0^{(k')},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\gamma) \qquad \mathcal{A}_0^{(k')} = \frac{\alpha_0^{(k')}}{\lambda + a_{k'}},$$

ou, sous forme explicite,

$$(35)\qquad A_{ij} = A_{ji} = \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)}.$$

Or, rien n'est plus facile que cette vérification, car, en déduisant de cette même expression tout d'abord par la différentiation

$$(36)\qquad A'_{ij} = -\frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)^2} - \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)^2} - \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)^2},$$

puis, en faisant dans la même formule successivement $j = k$, et $i = k$,

$$\left\{\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_k^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_k^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_k^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)},\\ A_{jk} &= \frac{\alpha_j^{(1)}\alpha_k^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_j^{(2)}\alpha_k^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_j^{(3)}\alpha_k^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)}.\end{aligned}\right.$$

---

expression complètement analogue à la valeur déjà trouvée (27) des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, de même que la formule précédente (6) l'est à la formule ci-dessus (25), ces deux dernières formules (6) et (γ) procédant l'une et l'autre des deux formules (25) et (27) en y écrivant simplement 0 au lieu de k. Il est bien évident dès lors que la répétition des mêmes procédés qui nous ont déjà fourni l'expression (33) des $A_{kk'}$, en partant des seules formules (25) et (27), nous donnera exactement de même, en partant cette fois des formules (6) et (γ), cette autre expression

$$A_{0k'} = \mathop{\mathrm{S}}_{k''} \frac{\alpha_0^{(k'')}\alpha_{k'}^{(k'')}}{S^{(k'')}(\lambda + a_{k''})},$$

de laquelle nous déduirons, en y faisant successivement $k' = 1, 2, 3$ (et écrivant k au lieu de k''),

$$A_{01} = \mathrm{S}\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_1^{(k)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)},\qquad A_{02} = \mathrm{S}\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_2^{(k)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)},\qquad A_{13} = \mathrm{S}\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_3^{(k)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)},$$

et, dès lors, il n'y aura plus ensuite qu'à substituer ces valeurs dans l'équation (24) écrite ainsi

$$A'_{00} = -\left[(A_{01})^2 + (A_{02})^2 + (A_{03})^2\right],$$

pour être en mesure d'obtenir la dernière inconnue A_{00} par une nouvelle quadrature, ainsi que nous l'énonçons dans le texte.

et de là, en multipliant ces deux dernières égalités,

$$
\begin{aligned}
A_{ik}A_{jk} = {} & \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}(\alpha_k^{(1)})^2}{(S^{(1)})^2(\lambda+a_1)^2} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}(\alpha_k^{(2)})^2}{(S^{(2)})^2(\lambda+a_2)^2} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}(\alpha_k^{(3)})^2}{(S^{(3)})^2(\lambda+a_3)^2} \\
& + \frac{(\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(3)}+\alpha_j^{(2)}\alpha_i^{(3)})\,\alpha_k^{(2)}\alpha_k^{(3)}}{S^{(2)}S^{(3)}(\lambda+a_2)(\lambda+a_3)} + \frac{(\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(3)}\alpha_i^{(1)})\,\alpha_k^{(3)}\alpha_k^{(1)}}{S^{(3)}S^{(1)}(\lambda+a_3)(\lambda+a_1)} \\
& + \frac{(\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(2)}+\alpha_j^{(1)}\alpha_i^{(2)})\,\alpha_k^{(1)}\alpha_k^{(2)}}{S^{(1)}S^{(2)}(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)},
\end{aligned}
$$

l'on en conclura ensuite, en sommant par rapport à k, et ayant égard à la définition (6) des $\mathcal{A}_{ij}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ij} = \mathsf{S}_{A_{ik}A_{jk}} = {} & \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{(\lambda+a_1)^2}\,\frac{\mathsf{S}_{(\alpha_k^{(1)})^2}}{(S^{(1)})^2} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{(\lambda+a_2)^2}\,\frac{\mathsf{S}_{(\alpha_k^{(2)})^2}}{(S^{(2)})^2} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{(\lambda+a_3)^2}\,\frac{\mathsf{S}_{(\alpha_k^{(3)})^2}}{(S^{(3)})^2} \\
& + \frac{(\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(3)}+\alpha_j^{(2)}\alpha_i^{(3)})}{(\lambda+a_2)(\lambda+a_3)}\,\frac{\mathsf{S}_{\alpha_k^{(2)}\alpha_k^{(3)}}}{S^{(2)}S^{(3)}} + \frac{(\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(3)}\alpha_i^{(1)})}{(\lambda+a_3)(\lambda+a_1)}\,\frac{\mathsf{S}_{\alpha_k^{(3)}\alpha_k^{(1)}}}{S^{(3)}S^{(1)}} \\
& + \frac{(\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(2)}+\alpha_j^{(1)}\alpha_i^{(2)})}{(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)}\,\frac{\mathsf{S}_{\alpha_k^{(1)}\alpha_k^{(2)}}}{S^{(1)}S^{(2)}},
\end{aligned}
$$

expression qui, en tenant compte, d'une part, de la définition (30) des quantités $S^{(k)}$, et, d'autre part, des trois relations (20) ou (21), se réduit simplement à la suivante

$$
\mathcal{A}_{ij} = \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{(\lambda+a_1)^2}\frac{1}{S^{(1)}} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{(\lambda+a_2)^2}\frac{1}{S^{(2)}} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{(\lambda+a_3)^2}\frac{1}{S^{(3)}},
$$

laquelle, étant rapprochée de celle ci-dessus (36) de la dérivée A'_{ij}, montre que l'on a bien effectivement, avec les expressions (34) des A_{ij}, pour toutes les valeurs de i et de j,

$$
A_{ij} + \mathcal{A}_{ij} = 0,
$$

comme nous l'avions pressenti, et voulions nous en assurer.

La question serait donc entièrement résolue par ces mêmes expressions (34) ou (35), si, en jetant un coup d'œil rétrospectif sur l'ensemble de ce calcul, il ne se présentait de suite à l'esprit une objection grave, qui nous a arrêtés nous-mêmes quelques instants, et qu'il importe de lever, car elle suffirait, si elle devait être confirmée, à ruiner l'autorité des raisonnements, ou l'exactitude des calculs, par le moyen desquels nous avons obtenu cette solution. En effet, les dix valeurs (34) des A_{ij} semblent à première vue renfermer douze constantes arbitraires, savoir les trois a_k, les trois $\alpha_0^{(k)}$, et six autres prises comme l'on voudra parmi les neuf $\alpha_k^{(k')}$ qui sont supposées liées entre elles seulement par les trois relations (20) ou (21), tandis que ces mêmes valeurs, satisfaisant à un système complet de dix équations différentielles du premier ordre, ne peuvent, *a priori*, renfermer en aucun cas plus de dix constantes arbitraires.

On découvrira facilement la solution de ce paradoxe, en regardant d'un peu plus près ces valeurs (34) ou (35), et examinant de quelle manière ces neuf dernières constantes $\alpha_k^{(k')}$ figurent dans leur expression, car l'on reconnaîtra ainsi aisément qu'elles n'y entrent que par l'intermédiaire des *neuf* rapports $\frac{\alpha_{k'}^{(k)}}{\sqrt{S^{(k)}}} = \alpha_{k'}^{(k)} \cdot (S^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$, dont les valeurs sont liées entre elles par *six* équations, savoir les trois équations (32) d'une part, et d'autre part les trois équations (20) ou (21), que l'on peut écrire tout aussi bien, en excluant la valeur 0 pour i et j, et les divisant par $(S^{(k)})^{\frac{1}{2}}(S^{(k')})^{\frac{1}{2}}$,

$$\underset{k''}{S} \frac{\alpha_{k''}^{(k)} \alpha_{k''}^{(k')}}{\sqrt{S^{(k)}}\sqrt{S^{(k')}}} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(k')} + \alpha_2^{(k)}\alpha_2^{(k')} + \alpha_3^{(k)}\alpha_3^{(k')}}{(S^{(k)})^{\frac{1}{2}}(S^{(k')})^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

et, par conséquent, ces neuf constantes $\alpha_k^{(k')}$, qui figurent en apparence dans les expressions (34), au lieu d'y introduire six constantes arbitraires, comme nous le préjugions tout à l'heure, n'en n'introduisent en réalité que trois seulement, ce qui fait, en y joignant les trois autres $\alpha_0^{(k)}$ et les trois a_k, neuf constantes arbitraires en tout, au lieu de douze.

Mais alors la solution (34) devient incomplète, puisque l'inté-

grale générale du système (15), formé de dix équations différentielles du premier ordre, doit renfermer dix constantes arbitraires, et non pas neuf seulement. Mais si l'on se rappelle que, les A_{ik} entrant seules, d'après la définition (6) dans la composition des $\mathfrak{A}_{ij}$, à l'exclusion par conséquent de A_{00}, cette inconnue n'intervient dans le système (15) que par sa dérivée seulement, et dans la seule équation (24), pour celle-là exceptionnellement on pourra aussi bien adjoindre à son expression (34) une constante arbitraire additive h, et l'on retrouvera bien ainsi le nombre requis de dix constantes arbitraires dans cette solution (34).

Convenant donc, en vue de prévenir désormais l'erreur que nous venons de signaler, de représenter chacune des douze constantes $\alpha_i^{(k)}\,(S^{(k)})^{-1}$, qui interviennent seules dans les expressions (34), par une quantité spéciale pour laquelle nous adopterons précisément de nouveau le symbole $\alpha_i^{(k)}$, les neuf quantités $\alpha_{k'}^{(k)}$ étant supposées liées en conséquence par les six relations

$$\mathbf{S}_{k'}\,(\alpha_k^{(k')})^2 = 1, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{S}_{k''}\,\alpha_{k''}^{(k)}\,\alpha_{k''}^{(k')} = 0,$$

qui tiendront lieu des relations (32) et (21), c'est-à-dire sous forme explicite

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha_1^{(1)})^2+(\alpha_1^{(2)})^2+(\alpha_1^{(3)})^2 = 1,\\ &(\alpha_2^{(1)})^2+(\alpha_2^{(2)})^2+(\alpha_2^{(3)})^2 = 1,\\ &(\alpha_3^{(1)})^2+(\alpha_3^{(2)})^2+(\alpha_3^{(3)})^2 = 1, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(3)}+\alpha_3^{(2)}\alpha_3^{(3)}) = 0,\\ &\alpha_1^{(3)}\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(3)}\alpha_2^{(1)}+\alpha_3^{(3)}\alpha_3^{(1)}) = 0,\\ &\alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}+\alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(2)}) = 0, \end{aligned}\right.$$

nous récrirons alors la solution (34) sous la forme plus simple

$$A_{ij} = \mathbf{S}\,\frac{\alpha_i^{(k)}\alpha_j^{(k)}}{\lambda + a_k},$$

et ces dix expressions, étant entendu que pour la première inconnue A_{00} on devra lui adjoindre une constante additive h, représenteront définitivement dès lors la solution la plus générale du problème proposé.

En posant donc dans la formule qui précède, en vue de simplifier les écritures qui vont suivre,

$$(38) \qquad A_k = \frac{1}{\lambda + a_k}, \qquad \text{d'où} \qquad A_{ij} = \mathbf{S} A_k \alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)},$$

la solution que nous venons d'obtenir consistera, sous forme explicite, dans les dix valeurs

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A_{00} = A_1 (\alpha_0^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_0^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_0^{(3)})^2 - h, \\ A_{11} = A_1 (\alpha_1^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_1^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_1^{(3)})^2, \\ A_{22} = A_1 (\alpha_2^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_2^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_2^{(3)})^2, \\ A_{33} = A_1 (\alpha_3^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_3^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_3^{(3)})^2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{01} = A_{10} = A_1 \alpha_0^{(1)} \alpha_1^{(1)} + A_2 \alpha_0^{(2)} \alpha_1^{(2)} + A_3 \alpha_0^{(3)} \alpha_1^{(3)}, \\ A_{02} = A_{20} = A_1 \alpha_0^{(1)} \alpha_2^{(1)} + A_2 \alpha_0^{(2)} \alpha_2^{(2)} + A_3 \alpha_0^{(3)} \alpha_2^{(3)}, \\ A_{03} = A_{30} = A_1 \alpha_0^{(1)} \alpha_3^{(1)} + A_2 \alpha_0^{(2)} \alpha_3^{(2)} + A_3 \alpha_0^{(3)} \alpha_3^{(3)}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{23} = A_{32} = A_1 \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} + A_2 \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(2)} + A_3 \alpha_2^{(3)} \alpha_3^{(3)}, \\ A_{31} = A_{13} = A_1 \alpha_3^{(1)} \alpha_1^{(1)} + A_2 \alpha_3^{(2)} \alpha_1^{(2)} + A_3 \alpha_3^{(3)} \alpha_1^{(3)}, \\ A_{12} = A_{21} = A_1 \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} + A_2 \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} + A_3 \alpha_1^{(3)} \alpha_2^{(3)}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

dans lesquelles A_1, A_2, A_3 représentent, pour abréger, d'après l'égalité de définition qui précède (38), les fractions simples :

$$(40) \qquad A_1 = \frac{1}{\lambda + a_1}, \qquad A_2 = \frac{1}{\lambda + a_2}, \qquad A_3 = \frac{1}{\lambda + a_3}.$$

Or les neuf constantes $\alpha_k^{(k')}$ étant alors liées entre elles par les six relations ci-dessus (37), il devient visible, d'une part, que ces neuf constantes sont les cosinus directeurs d'un certain système d'axes fixes, dont ils définissent la position par rapport aux axes actuels, et d'autre part que la solution que nous venons d'obtenir, et qui est exprimée en dernière analyse par les valeurs (39) et (40), coïncidera *littéralement* avec celle formulée dans

notre Chapitre II par les égalités (129) (que nous avions déduite, tout d'abord, par la seule transformation des coordonnées rectilignes, de la solution d'une question plus simple précédemment obtenue), en établissant entre ces deux systèmes de formules, de même qu'entre les équations proposées (1) de cette Note et (126) ou (128) du Chapitre II, la corrélation suivante, savoir

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{A}_{00}=\mathfrak{J},\quad \mathrm{A}_{11}=\mathcal{A},\quad \mathrm{A}_{22}=\mathcal{B},\quad \mathrm{A}_{33}=\mathcal{C},\\
\mathrm{A}_{01}=\mathrm{A}_{10}=\mathcal{G},\quad \mathrm{A}_{02}=\mathrm{A}_{20}=\mathfrak{H},\quad \mathrm{A}_{03}=\mathrm{A}_{30}=\mathcal{K},\\
\mathrm{A}_{23}=\mathrm{A}_{32}=\mathcal{D},\quad \mathrm{A}_{31}=\mathrm{A}_{13}=\mathcal{E},\quad \mathrm{A}_{12}=\mathrm{A}_{21}=\mathcal{F},\\
\\
\mathrm{A}_1=\mathrm{A},\quad \mathrm{A}_2=\mathrm{B},\quad \mathrm{A}_3=\mathrm{C},\quad a_1=a^2,\quad a_2=b^2,\quad a_3=c^2,\\
\alpha_0^{(1)}=x'_0,\quad \alpha_0^{(2)}=y'_0,\quad \alpha_0^{(3)}=z'_0,\quad \alpha_1^{(1)}=\alpha,\quad \alpha_1^{(2)}=\alpha',\quad \alpha_1^{(3)}=\alpha'',\\
\alpha_2^{(1)}=\beta,\quad \alpha_2^{(2)}=\beta',\quad \alpha_2^{(3)}=\beta'',\quad \alpha_3^{(1)}=\gamma,\quad \alpha_3^{(2)}=\gamma',\quad \alpha_3^{(3)}=\gamma'',
\end{array}\right.$$

conclusion qui confirme aussi complètement qu'on peut le désirer celle à laquelle nous avions été conduits déjà par une voie beaucoup plus rapide.

Le succès du calcul assez long et compliqué que nous venons de présenter dans cette Note tient tout entier, comme on le voit, au mode de notation que nous avons adopté pour les coefficients de l'équation de la famille de surfaces proposée $\Lambda = 0$, étant bien évident qu'il fût devenu radicalement impraticable, si nous avions écrit cette équation sous la forme (128), avec laquelle on l'étudiait naguère encore dans la Géométrie Analytique, c'est-à-dire si nous avions adopté un symbole spécial pour représenter chacun de ses dix coefficients : car les 35 équations du second ordre qu'il nous eût fallu écrire individuellement, à la suite les unes des autres, eussent mis en jeu 30 fonctions différentes, représentées chacune par un symbole particulier, si l'on borne la supputation aux inconnues primitives, et 74 en réalité, si l'on compte les fonctions auxiliaires dont l'introduction dans le

calcul nous a seule permis d'arriver à la solution du problème (*).

Aussi, bien que ce calcul ne nous ait amené en fin de compte à aucun résultat nouveau, nous ne pensons pas néanmoins que l'on doive le juger comme complètement dénué d'intérêt, en ce qu'il établit d'une façon péremptoire, que la multiplicité des inconnues et des équations à traiter ne constitue pas un obstacle irréductible à l'application de notre méthode pour la recherche des familles isothermes de surfaces, et qu'il en démontre *par le fait* la *praticabilité* effective (si l'on veut bien nous pardonner ce mot barbare), à la condition d'avoir recours, pour écrire l'équation de la famille de surfaces proposée, à une notation symbolique, présentant les mêmes avantages de compréhension et de symétrie. C'est pourquoi nous espérons, en terminant, l'indulgence et surtout la patience du Lecteur, pour accorder quelque attention à ce long calcul, quelque peu attrayant qu'il paraisse au premier abord, dans la pensée que l'application de procédés analogues aux équations de degrés supérieurs pourrait peut-être conduire un Analyste plus habile à la découverte de familles isothermes inconnues jusqu'ici, dont la rencontre constituerait pour la Science une précieuse acquisition, et présenterait cette fois dès lors un intérêt incontestable.

(*) Savoir, 30 pour les dix inconnues A_{ij}, et leurs dérivées premières et secondes; 20 également pour les dix fonctions $\mathcal{A}_{ij}$ et leurs dérivées premières; et enfin 24 pour les douze inconnues auxiliaires $\mathcal{A}_j^{(k)}$, et leurs dérivées premières, que nous avons seules considérées : ce qui, en y joignant les douze constantes $\alpha_j^{(k)}$, qui figurent dans les expressions (16), forme un total de 86 quantités différentes, qu'il eût fallu, avec ce mode de notation, représenter chacune par un symbole spécial.

ERRATA

(RELATIFS A LA NOTE I DE L'APPENDICE.)

Page 18 (en note.) L'avant-dernière ligne d'équations doit être rétablie ainsi qu'il suit :

$$A_{01} = \mathrm{S}\,\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_1^{(k)}}{\mathrm{S}^{(k)}(\lambda + a_k)}, \qquad A_{02} = \mathrm{S}\,\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_2^{(k)}}{\mathrm{S}^{(k)}(\lambda + a_k)}, \qquad A_{03} = \mathrm{S}\,\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_3^{(k)}}{\mathrm{S}^{(k)}(\lambda + a_k)},$$

Page 20, 3e ligne, à compter du bas de la page, au lieu de $\alpha_0^{(k)}$, lire : $\alpha_0^{(k)}.(\mathrm{S}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$.

RECHERCHES

SUR

LES ACCÉLÉRATIONS EN GÉNÉRAL

PAR

PH. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain.

PRÉLIMINAIRES.

Nous adoptons pour abréger, dans ce travail, certaines notations et définitions dont plusieurs, d'ailleurs, sont déjà usitées, mais qu'il convient d'expliquer pour faciliter la lecture.

I. Lorsqu'un système invariable, un *solide*, tourne autour d'un point fixe O, nous représentons l'axe instantané de rotation par une droite OI menée du point O dans la direction de l'axe, dans un sens tel que la rotation ait lieu de *gauche à droite* pour l'observateur couché sur OI, les pieds en O, et d'une longueur OI proportionnelle à la vitesse angulaire ω. Le point I est alors le *pôle* de la rotation.

II. Lorsque nous considérons deux directions bien définies partant d'un même point O; par exemple, un axe de rotation $OI = \omega$, et un rayon vecteur $OM = \rho$, l'angle IOM compris entre ces deux directions sera désigné par $\overline{\omega\rho}$. Si nous avons trois directions partant d'un point O, telles qu'un axe de rotation ω, un rayon vecteur ρ, un axe de coordonnées OX, l'angle dièdre compris entre les plans de deux de ces directions, par exemple, entre le plan de l'angle $\overline{\omega\rho}$ et le plan de l'angle $\overline{\rho x}$, sera désigné par $\omega\overline{\rho}x$, *la direction qui forme l'arête du dièdre étant*

écrite entre les deux autres. En vertu de ces notations, la formule des triangles sphériques s'écrirait

$$\cos \overline{\omega x} = \cos \overline{\omega \rho} \cos \overline{\rho x} + \sin \overline{\omega \rho} \sin \overline{\rho x} \cos \overline{\omega \rho x}.$$

III. Une direction (l, m, n) est celle qui fait, avec trois axes rectangulaires donnés, des angles dont les cosinus sont respectivement l, m, n.

Les lettres x, y, z placées en indices, comme dans $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, désignent toujours les projections sur les axes coordonnés de la droite, de longueur et de direction déterminées, désignée par la lettre principale.

Plus généralement, l'indice u marque la projection sur une direction bien déterminée u. Ainsi j_{nu} désigne la projection, sur la direction u, de l'accélération j_n d'ordre n d'un point mobile.

IV. Après M. Resal, nous appelons *produit géométrique* de deux longueurs a et b le produit de ces droites par le cosinus de l'angle compris entre leurs directions bien définies. Ayant souvent de tels produits à considérer, nous les indiquerons, pour abréger, par un astérisque entre a et b. Ainsi l'on aura

$$a * b = ab \cos \overline{ab}.$$

V. Nous emploierons souvent la notion des *index*, déjà utilisée dans notre *Cours de mécanique*. Un point mobile M a une certaine vitesse v; d'une origine fixe O on tire un rayon vecteur OM_1 égal et parallèle à v; M_1 est l'*index* du point M. Le point M_1 étant aussi mobile, en général, admet à son tour un index M_2, dont le rayon vecteur variable OM_2 figure à chaque instant, en grandeur et en direction, la vitesse du point M_1 ou l'accélération du point M : M_2 est l'*index du second ordre* de M. Et ainsi de suite.

VI. Nous emploierons aussi, par places, la notation de Bellavitis pour les équipollences ou équations géométriques. Ainsi l'équipollence

$$R \doteq r + r' + r'' + \cdots$$



signifie qu'une droite R est la *résultante* de droites r, r', r'' données de grandeur et de direction. Elle entraîne toujours, comme on sait, les équations

$$R_x = r_x + r'_x + r''_x + \cdots,$$
$$R_y = r_y + r'_y + r''_y + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

PREMIÈRE PARTIE.

ACCÉLÉRATIONS DU PREMIER ORDRE DANS LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

---

§ 1. *De l'accélération angulaire.*

1. Un solide étant mobile autour d'un point fixe O, on porte à partir de ce point la droite $OI = \omega$ représentant l'axe instantané de rotation à l'instant t que l'on considère (fig. 1). Soit de même $OI' = \omega + d\omega$ l'axe instantané à l'époque $t + dt$; la droite OL, parallèle à II' et égale au rapport $II' : dt$ à la limite, est l'accélération angulaire λ_1 ou λ du solide à l'époque t.

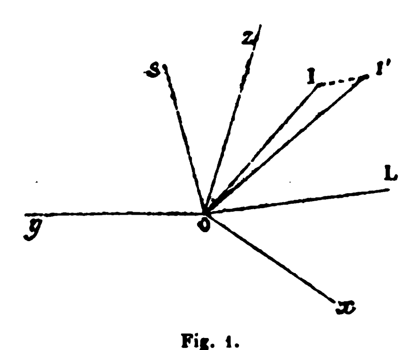


Fig. 1.

Il s'ensuit que OL est, à chaque instant, égal et parallèle à la vitesse d'un point I qui coïnciderait constamment avec le pôle de la rotation instantanée : L est l'*index* du point I. Appliquant au point I les formules connues pour les composantes de la vitesse d'un point suivant son rayon vecteur et normalement à

ce rayon, on aura, pour les composantes λ_ω et λ_n de l'accélération angulaire suivant OI et normalement à OI,

$$\lambda_\omega = \frac{d\omega}{dt}, \quad \lambda_n = \omega\,\frac{d\psi}{dt},$$

ψ étant l'angle *conique* que décrit l'axe instantané sur la surface du cône qui est le lieu de cet axe dans l'espace.

2. La remarque faite ci-dessus donne immédiatement les composantes λ_x, λ_y, λ_z de l'accélération angulaire suivant trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz doués d'un mouvement quelconque autour de l'origine O. Soient, à l'époque t, p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω suivant ces axes (ou les coordonnées du point I); α, β, γ celles de l'axe instantané $OS = \sigma$ du système de comparaison $Oxyz$. La vitesse du pôle I dans l'espace est la résultante de sa vitesse relative par rapport à $Oxyz$, laquelle a pour composantes $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, et de sa vitesse d'entraînement due à la rotation du système $Oxyz$ autour de OS, vitesse dont les composantes sont $\beta r - \gamma q$, $\gamma p - \alpha r$, $\alpha q - \beta p$; donc

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \lambda_x = \dfrac{dp}{dt} + \beta r - \gamma q, \\ \lambda_y = \dfrac{dq}{dt} + \gamma p - \alpha r, \\ \lambda_z = \dfrac{dr}{dt} + \alpha q - \beta p. \end{cases}$$

Ces expressions se simplifient dans deux cas : 1° Quand le système de comparaison $Oxyz$ est supposé fixe, d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$; 2° quand ces axes sont liés invariablement au solide lui-même, ce qui donne

$$\alpha = p, \quad \beta = q, \quad \gamma = r.$$

Dans ces deux cas, on a simplement

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \lambda_x = \frac{dp}{dt}, \quad \lambda_y = \frac{dq}{dt}, \quad \lambda_z = \frac{dr}{dt};$$

les composantes de l'accélération angulaire du solide parallèlement à trois axes rectangulaires fixes, ou liés invariablement au solide, s'expriment par les dérivées par rapport au temps des composantes de la rotation du solide suivant ces axes respectivement.

3. Le même principe conduit à la détermination de l'accélération angulaire du solide dans son mouvement *relatif* par rapport au système $Oxyz$. Soient OI' l'axe représentatif de la rotation relative; p', q', r' ses projections sur Ox, Oy, Oz respectivement, les notations précédentes étant conservées. Le théorème connu de la composition des rotations donne

$$p = p' + \alpha, \qquad q = q' + \beta, \qquad r = r' + \gamma,$$

et il suffit de substituer ces valeurs dans les équations (1) pour trouver

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \lambda_x = \dfrac{dp'}{dt} + \dfrac{d\alpha}{dt} + \beta r' - \gamma q', \\ \lambda_y = \dfrac{dq'}{dt} + \dfrac{d\beta}{dt} + \gamma p' - \alpha r', \\ \lambda_z = \dfrac{dr'}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt} + \alpha q' - \beta p'. \end{cases}$$

Or, d'après ce qui a été établi ci-dessus, $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$ sont les composantes de l'accélération angulaire du solide dans son mouvement relatif par rapport à $Oxyz$, ou de l'*accélération angulaire relative* λ'; $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ sont les composantes de l'*accélération angulaire d'entraînement*, λ''; $\beta r' - \gamma q'$, etc., sont les composantes de la vitesse d'entraînement du point I' due à la rotation OS, d'après des formules connues; appelons cette vitesse l'*accélération angulaire composée* du solide, λ'''. Il résulte donc des équations (3) que l'on a

$$\lambda_x = \lambda'_x + \lambda''_x + \lambda'''_x, \cdots$$

ou que : si un solide tournant autour d'un point fixe O est rapporté à un système de comparaison mobile autour du même point, l'accélération angulaire absolue est la résultante de l'accélération angulaire relative, de l'accélération angulaire d'entraî-

nement et de l'accélération angulaire composée. Celle-ci est représentée, en grandeur et en direction, par la vitesse, due à la rotation d'entraînement, du pôle I' de la rotation relative.

Ce théorème est dû à M. Resal (*Cinématique pure*, p. 263).

4. On procède de même pour les accélérations angulaires des ordres supérieurs. L'accélération angulaire du second ordre λ_2 dérive de celle du premier ordre λ, comme celle-ci de l'axe instantané ω; elle est donc figurée par une droite OL_2 égale et parallèle à la vitesse, dans l'espace, du pôle L de l'accélération angulaire du premier ordre. En projetant sur les axes mobiles Ox, Oy, Oz et considérant encore la vitesse absolue du point L comme la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entrainement, on aura, comme au numéro **2**,

$$\lambda_{2x} = \frac{d\lambda_x}{dt} + \beta\lambda_z - \gamma\lambda_y,$$

ou, en substituant à λ_x, λ_y, λ_z leurs valeurs (1),

$$\lambda_{2x} = \frac{d^2p}{dt^2} + 2\left(\beta\frac{dr}{dt} - \gamma\frac{dq}{dt}\right) + r\frac{d\beta}{dt} - q\frac{d\gamma}{dt}$$
$$+ \beta(\alpha q - \beta p) - \gamma(\gamma p - \alpha r).$$

On remarquera que $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ sont les composantes μ_x, μ_y, μ_z de l'accélération angulaire μ du système $Oxyz$, d'après la remarque de la fin du numéro **2**. D'autre part, on a

$$\beta(\alpha q - \beta p) - \gamma(\gamma p - \alpha r) = (\alpha p + \beta q + \gamma r)\alpha - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)p$$
$$= \omega * \sigma . \alpha - \sigma^2 p.$$

Opérant de même pour λ_{2y}, λ_{2z}, on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda_{2x} = \dfrac{d^2p}{dt^2} + 2\left(\beta\dfrac{dr}{dt} - \gamma\dfrac{dq}{dt}\right) + r\mu_y - q\mu_z + \omega * \sigma.\alpha - \sigma^2 p \\ \lambda_{2y} = \dfrac{d^2q}{dt^2} + 2\left(\gamma\dfrac{dp}{dt} - \alpha\dfrac{dr}{dt}\right) + p\mu_z - r\mu_x + \omega * \sigma.\beta - \sigma^2 q, \\ \lambda_{2z} = \dfrac{d^2r}{dt^2} + 2\left(\alpha\dfrac{dq}{dt} - \beta\dfrac{dp}{dt}\right) + q\mu_x - p\mu_y + \omega * \sigma.\gamma - \sigma^2 r. \end{cases}$$



L'interprétation géométrique de ces formules ne serait pas difficile; nous signalerons seulement deux cas particuliers :

1° Si les axes Ox, Oy, Oz sont supposés immobiles, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\sigma = 0$, $\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$, on a simplement

$$\lambda_{2x} = \frac{d^2p}{dt^2}, \quad \lambda_{2y} = \frac{d^2q}{dt^2}, \quad \lambda_{2z} = \frac{d^2r}{dt^2};$$

les composantes de la suraccélération angulaire suivant ces axes fixes sont respectivement égales aux dérivées secondes, par rapport au temps, des composantes de la rotation instantanée; ce qui était évident *a priori*.

2° Si les axes Ox, Oy, Oz sont liés au solide, on a encore $\alpha = p$, $\beta = q$, $\gamma = r$, d'où

$$\mu_x = \frac{dp}{dt}, \quad \mu_y = \frac{dq}{dt}, \quad \mu_z = \frac{dr}{dt},$$

et les équations (4) se réduisent aux suivantes

$$(5) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \lambda_{2x} &= \frac{d^2p}{dt^2} + q\frac{dr}{dt} - r\frac{dq}{dt}, \\ \lambda_{2y} &= \frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dp}{dt} - p\frac{dr}{dt}, \\ \lambda_{2z} &= \frac{d^2r}{dt^2} + p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt}. \end{aligned} \right.$$

On remarque qu'il n'y a plus ici, comme dans l'accélération angulaire du premier ordre, identité d'expression entre les projections sur des axes fixes et sur des axes liés au solide.

Les accélérations angulaires du troisième ordre s'obtiennent aussi simplement. Nous nous bornons à donner les formules pour le cas où le système $Oxyz$ est lié au solide. On trouve

$$(6) \quad . \left\{ \begin{aligned} \lambda_{3x} &= \frac{d^3p}{dt^3} + 2\left(q\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d^2q}{dt^2}\right) + \omega\left(p\frac{d\omega}{dt} - \omega\frac{dp}{dt}\right), \\ \lambda_{3y} &= \frac{d^3q}{dt^3} + 2\left(r\frac{d^2p}{dt^2} - p\frac{d^2r}{dt^2}\right) + \omega\left(r\frac{d\omega}{dt} - \omega\frac{dq}{dt}\right), \\ \lambda_{3z} &= \frac{d^3r}{dt^3} + 2\left(p\frac{d^2q}{dt^2} - q\frac{d^2p}{dt^2}\right) + \omega\left(r\frac{d\omega}{dt} - \omega\frac{dr}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

On déduirait de là les formules pour les accélérations angulaires dans les mouvements relatifs, mais nous exposerons plus loin une méthode générale et très simple qui résout le problème pour un ordre quelconque.

§ 2. *Propriétés générales des accélérations des points d'un solide dont un point est fixe.*

5. Un solide étant mobile autour d'un point fixe O, les composantes de la vitesse d'un point quelconque M parallèlement à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ont pour expressions, p, q, r étant les composantes de l'axe instantané OI et x, y, z les coordonnées du point M, par rapport au système $Oxyz$,

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} v_x = qz - ry, \\ v_y = rx - pz, \\ v_z = py - qx. \end{cases}$$

Si l'on suppose les axes *fixes*, on en déduira pour la composante j_x de l'accélération du point M parallèlement à Ox,

$$j_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}.$$

ou, en vertu des formules (2),

$$(8) \quad \ldots \quad \begin{cases} j_x = \lambda_y z - \lambda_z y + qv_z - rv_y, \quad \text{et de même} \\ j_y = \lambda_z x - \lambda_x z + rv_x - pv_z, \\ j_z = \lambda_x y - \lambda_y x + pv_y - qv_x. \end{cases}$$

On voit facilement que ces relations (8) subsistent même pour un système d'axes $Oxyz$ mobile d'une manière quelconque autour du point O. L'interprétation géométrique en est facile : les termes $\lambda_y z - \lambda_z y$, ... sont, d'après (7), les composantes de la vitesse du point M dans une rotation dont OL serait l'axe représentatif; les termes $qv_z - rv_y$, ... auxquels se réduiraient les expressions de j_x, ... si λ_x, λ_y, λ_z étaient nuls, c'est-à-dire si le

solide avait une rotation uniforme ω autour de l'axe fixe OI, sont les composantes de l'accélération du point M dans cette hypothèse particulière. Donc

Dans la rotation d'un solide autour d'un point fixe, l'accélération d'un point quelconque se compose 1° *de l'accélération centripète due à la rotation autour de l'axe instantané devenu invariable;* 2° *de la vitesse due à une rotation dont l'accélération angulaire serait l'axe représentatif.*

La substitution des valeurs (7) de v_x, v_y, v_z dans les équations (8) donnerait

$$j_x = \lambda_y z - \lambda_z y + q(py - qx) - r(rx - pz),$$

d'où, observant que si ρ est le rayon vecteur OM, on a

$$px + qy + rz = \omega * \rho,$$

on tire facilement

$$(9) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} j_x = \lambda_y z - \lambda_z y + \omega * \rho . p - \omega^2 x, \\ j_y = \lambda_z x - \lambda_x z + \omega * \rho . q - \omega^2 y, \\ j_z = \lambda_x y - \lambda_y x + \omega * \rho . r - \omega^2 z. \end{array} \right.$$

Ces formules s'interprètent aussi géométriquement.

6. Les équations (8) donnent lieu à de nombreuses conséquences. Si on les multiplie respectivement par p, q, r et qu'on les ajoute, on a

$$\begin{aligned} pj_x + qj_y + rj_z &= \lambda_x(ry - qz) + \lambda_y(pz - rx) + \lambda_z(qx - py) \\ &= -(\lambda_x v_x + \lambda_y v_y + \lambda_z v_z), \end{aligned}$$

d'où

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \omega * j + \lambda * v = 0.$$

A chaque instant, la somme des produits géométriques de l'axe instantané par l'accélération d'un point quelconque et de l'accélération angulaire par la vitesse du même point, est nulle quel que soit ce point. L'équation (10) peut s'écrire aussi

$$\frac{j \cos \overline{\omega j}}{v \cos \overline{\lambda v}} = -\frac{\lambda}{\omega},$$

et s'énonce alors sous cette forme : *A chaque instant, les projections de l'accélération d'un point sur l'axe instantané et de sa vitesse sur l'accélération angulaire, sont dans un rapport qui est constant quel que soit ce point, et égal au rapport de l'accélération angulaire du solide à sa vitesse angulaire, changé de signe.*

Ce théorème a été trouvé par M. Resal sous une forme un peu différente (*Cinématique pure,* p. 220.).

De là résulte un théorème de dynamique. Soit m la masse d'un point (x, y, z) du corps; multiplions par m l'équation (10) et faisons la somme pour tous les points du système. Il viendra

$$\omega \Sigma mj \cos \overline{\omega j} + \lambda \Sigma mv \cos \overline{\lambda v} = 0.$$

Or, $\Sigma mj \cos \overline{\omega j}$ représente la somme des projections des forces conservées sur l'axe OI, qui est égale, comme on sait, à la projection de la résultante R des forces extérieures qui agissent sur le corps, en y comprenant la réaction du point fixe. Le premier terme est donc égal à $\omega \mathrm{R} \cos \overline{\omega \mathrm{R}}$. De même, si nous représentons par $\mathrm{OS} = \mathrm{S}$ la résultante des quantités de mouvement de tous les points transportées en O, le deuxième terme sera la même chose que $\lambda \mathrm{S} \cos \overline{\lambda \mathrm{S}}$, donc l'équation se réduira à

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \omega * \mathrm{R} + \lambda * \mathrm{S} = 0,$$

c'est-à-dire que, *lorsqu'un solide tourne autour d'un point fixe, à chaque instant, le produit géométrique de l'axe instantané par la résultante des forces extérieures* (y compris la réaction du point fixe) *et le produit géométrique de l'accélération angulaire par la résultante des quantités de mouvement, donnent une somme égale à zéro.*

7. On tire encore des équations (8)

$$v_x j_x + v_y j_y + v_z j_z = \lambda_x (y v_z - z v_y) + \lambda_y (z v_x - x v_z) + \lambda_z (x v_y - y v_x),$$

d'où, multipliant par m et faisant la somme pour tous les points du solide,

$$\Sigma mv * j = \lambda_x \Sigma m (y v_z - z v_y) + \lambda_y \Sigma m (z v_x - x v_z) + \lambda_z \Sigma m (x v_y - y v_x).$$



Mais si nous représentons par $OK = K$ l'axe du couple résultant des quantités du mouvement de tous les points du corps, relatif à l'origine O, ou l'*axe d'impulsion*, à cause des relations $K_x = \Sigma m (yv_z - zv_y)$, etc., le second membre se réduira à $\lambda_x K_x + \lambda_y K_y + \lambda_z K_z$, d'où

$$\Sigma mv * j = \lambda * K.$$

D'autre part, les équations (7) nous donnent

$$v_x j_x + v_y j_y + v_z j_z = p (yj_z - zj_y) + q (zj_x - xj_z) + r (xj_y - yj_x),$$

et si $OG = G$ représente l'axe du couple résultant des forces extérieures relatif au point O, on aura, en vertu du théorème des moments,

$$\Sigma m (yj_z - zj_y) = G_x, \quad \text{etc.}$$

d'où

$$\Sigma mv * j = \omega * G,$$

ce qui, combiné avec l'équation ci-dessus, conduit à la relation

(12) . . . . $\omega * G = \lambda * K.$

On a donc ces deux propriétés du mouvement d'un solide autour d'un point fixe : 1° *La somme des produits géométriques des quantités de mouvement de tous les points par leurs accélérations égale le produit géométrique de l'axe instantané par l'axe du couple résultant des forces extérieures, relatif au point fixe ;*

2° *Le produit géométrique de l'axe instantané de rotation par l'axe du couple moteur est égal au produit géométrique de l'accélération angulaire par l'axe d'impulsion.*

8. On a encore, par les équations (8),

$$xj_x + yj_y + zj_z = v_x(ry - qz) + v_y(pz - rx) + v_z(qx - py) = -v^2,$$

ou

$$\rho * j = -v^2,$$

ce qui montre que l'accélération fait toujours un angle obtus avec la direction OM du rayon vecteur. De là

$$\Sigma m\rho \ast j = -\Sigma mv^2.$$

Mais un groupement différent donne aussi

$$\rho \ast j = -p\,(yv_z - zv_y) - q\,(zv_x - xv_z) - r\,(xv_y - yv_x),$$

donc

$$\Sigma m\rho \ast j = -\omega \ast \mathrm{K},$$

et par suite

(13) . . . . $\Sigma mv^2 = \omega \ast \mathrm{K}.$

La force vive du corps est égale, à chaque instant, au produit géométrique de l'axe instantané de rotation par l'axe d'impulsion relatif au point fixe, ce qui revient, d'ailleurs, à un théorème connu.

9. On donne encore à l'équation (11) une forme différente. Le produit $\omega \ast j$ peut s'écrire ainsi :

$$\omega \ast j = x\,(q\lambda_z - r\lambda_y) + y\,(r\lambda_x - p\lambda_z) + z\,(p\lambda_y - q\lambda_x),$$

d'où l'on tire en multipliant par m et faisant la somme pour tous les points

$$\omega \ast \mathrm{R} = (q\lambda_z - r\lambda_y)\,\Sigma mx + (r\lambda_x - p\lambda_z)\,\Sigma my + (p\lambda_y - q\lambda_x)\,\Sigma mz.$$

Appelons M la masse du solide; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité P. Les relations $\Sigma mx = \mathrm{M}x_1$, etc..., donneront

$$\omega \ast \mathrm{R} = \mathrm{M}\left[x_1\,(q\lambda_z - r\lambda_y) + y_1\,(r\lambda_x - p\lambda_z) + z_1\,(x\lambda_y - y\lambda_x)\right]$$
$$= \mathrm{M}\ \mathrm{vol}\ \overline{\mathrm{OPIL}},$$

vol $\overline{\mathrm{OPIL}}$ désignant le volume du parallélipipède construit sur les arêtes contiguës OP, OI, OL. Donc

Le produit géométrique de l'axe instantané de rotation par la résultante des forces extérieures (y compris la réaction du point fixe) *est égal à la masse du corps, multipliée par le volume du parallélipipède construit sur l'axe instantané, l'accélération angulaire et le rayon vecteur du centre de gravité, comme arêtes contiguës.*

Enfin, on déduirait encore des équations (8) diverses relations d'un moindre intérêt, telles que les suivantes : 1° *Le produit géométrique de l'accélération angulaire par la résultante* R *des forces extérieures, y compris la réaction du point fixe, est égal et de signe contraire au volume du parallélipipède qui a pour arêtes contiguës l'axe instantané* OI, *l'accélération angulaire* OL, *et la résultante* OS *des quantités de mouvement.*

2° On a les égalités

$$v * j = -\omega\lambda\rho^2 \sin \overline{\omega\rho} \sin \overline{\lambda\rho} \cos \overline{\omega\rho\lambda},$$
$$\lambda * j = -\omega^2\lambda\rho \sin \overline{\omega\rho} \sin \overline{\omega\lambda} \cos \overline{\lambda\omega\rho},$$

et si l'on désigne par w la vitesse, due à la rotation OI, du point du corps qui coïncide avec le pôle L de l'accélération angulaire, par ρ_1 le rayon vecteur OP du centre de gravité, on a aussi

$$\omega * j = w * \rho, \qquad \lambda * j + w * v = 0,$$
$$\omega * R = M \cdot w * \rho_1, \qquad \lambda * R + w * S = 0.$$

§ 3. *Groupement et construction géométriques des accélérations dans un solide qui a un point fixe.*

10. Nous allons d'abord, au moyen des formules (8), établir certains groupements entre les accélérations des points du solide qui satisfont à une condition déterminée.

Si dans ces équations (8) on substitue les valeurs (7) de v_x, v_y, v_z, on trouve que j_x, j_y, j_z sont des fonctions linéaires homogènes de x, y, z. Il en résulte que

1° Tous les points situés sur un même rayon partant du point O ont des accélérations parallèles et respectivement pro-

portionnelles aux distances de ces points au point O. Elles sont de sens contraire pour deux points situés de part et d'autre du point O. Il s'ensuit que si l'on connait l'accélération d'un de ces points, on connaîtra celles de tous les autres;

2° Tous les points dont l'accélération est normale à une droite OQ sont dans un même plan passant par le point fixe et normal à une droite OP que l'on saurait déterminer, mais ce problème est compris dans un problème plus général que nous allons traiter.

11. Cherchons le lieu des points du solide dont l'accélération, projetée sur une direction OQ (l, m, n), a une valeur donnée ϖ.

Ces points vérifient l'équation

$$lj_x + mj_y + nj_z = \varpi;$$

substituons-y les valeurs de j_x, j_y, j_z données par les équations (9); nous aurons

$$\begin{gathered}(m\lambda_z - n\lambda_y)\,x + (n\lambda_x - l\lambda_z)\,y + (l\lambda_y - m\lambda_x)\,z \\ -(px + qy + rz)(lp + mq + nr) - \omega^2(lx + my + nz) = \varpi.\end{gathered}$$

Élevons en O une perpendiculaire OQ′ au plan QOL (fig. 2), du côté de ce plan où la rotation de OQ vers OL paraîtrait se faire de la gauche vers la droite; nous aurons, comme on sait,

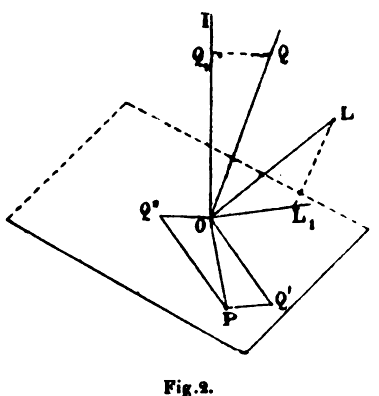


Fig. 2.

$$m\lambda_y - n\lambda_z = \lambda \sin \overline{\lambda Q} \cos \overline{Q'x}, \text{ etc.}$$

D'ailleurs, on a

$$lp + mq + nr = \omega \cos \overline{\omega Q},$$

donc

$$\begin{aligned}p\,(lp + mq + nr) - \omega^2\lambda &= \omega^2(\cos \overline{\omega Q} \cos \overline{\omega x} - \cos \overline{Qx}) \\ &= -\,\omega^2 \sin \overline{\omega Q} \sin \overline{\omega x} \cos \overline{Q\omega x} = \omega^2 \sin \overline{\omega Q} \cos \overline{Q''x},\end{aligned}$$

OQ″ étant la direction normale à OI dans le plan QOI, dans le sens opposé à OQ. Le coefficient de x dans l'équation du plan devient ainsi :

$$\lambda \sin \overline{\lambda Q} \cos \overline{Q'x} + \omega^2 \sin \overline{\omega Q} \cos \overline{Q''x},$$

et de même, ceux de y, z,

$$\lambda \sin \overline{\lambda Q} \cos \overline{Q'y} + \omega^2 \sin \overline{\omega Q} \cos \overline{Q''y},$$
$$\lambda \sin \overline{\lambda Q} \cos \overline{Q'z} + \omega^2 \sin \overline{\omega Q} \cos \overline{Q''z}$$

Construisons la droite OP = P dont les projections sur Ox, Oy, Oz seraient respectivement égales à ces quantités, l'équation du plan cherché prendra la forme

(α) . . . . . . $P_x x + P_y y + P_z z = \varpi.$

C'est l'équation d'un plan normal à OP, mené à une distance du point fixe égale à $\frac{\varpi}{P}$. Mais les valeurs de P_x, P_y, P_z font voir que OP est la résultante d'une droite égale à $\lambda \sin \overline{\lambda Q}$ dirigée suivant OQ′, et d'une droite égale à $\omega^2 \sin \overline{\omega Q}$ dirigée suivant OQ″. On a donc la construction suivante :

Pour trouver le lieu des points dont l'accélération est projetée sur une droite OQ *suivant une grandeur donnée* ϖ, *on projette l'accélération angulaire en* OL_1 *sur le plan normal à* OQ *et on fait tourner cette projection d'un angle droit, autour de* OQ, *de gauche à droite, jusqu'en* OQ′. *D'autre part, on porte sur* OQ *une longueur égale à* ω^2 *que l'on projette en* OQ_1 *sur l'axe instantané, et l'on tire* OQ″ *égal et parallèle à la droite projetante* QQ_1. *Enfin, on construit la résultante* OP = P *de* OQ′, OQ″. *Le lieu cherché est un plan* (A) *normal à* OP, *à une distance du point* O *égale à* ϖ : P.

Si l'on considère dans ce plan les points dont l'accélération est la même en grandeur, leurs accélérations seront également inclinées sur la droite OQ. P étant indépendant de ϖ, la distance du plan (A) au point O varie proportionnellement à la projection ϖ, et est nulle en même temps que cette dernière. Dans ce cas, *le plan* (A) *passe par le point fixe et ses points ont leurs*

accélérations normales à OQ. La construction de OP donnée plus haut détermine donc le plan dont les accélérations sont normales à OQ.

12. Le problème inverse : Étant donnée une droite OP, trouver la droite OQ, se résout d'une manière analogue, en résolvant les équations (9) par rapport à x, y, z. On obtient ainsi les formules

$$(14) \quad \ldots\ldots \begin{cases} x\Delta = \alpha j_x + \beta j_y + \gamma j_z, \\ y\Delta = \alpha' j_x + \beta' j_y + \gamma' j_z, \\ z\Delta = \alpha'' j_x + \beta'' j_y + \gamma'' j_z, \end{cases}$$

dans lesquelles on a

$$\Delta = -\omega\lambda_N^2,$$

$$\begin{cases} \alpha = \omega^2 p^2 + \lambda_x^2, \quad \beta = \omega * \lambda \cdot r + \lambda_x\lambda_y + \omega^2(pq - \lambda_z), \quad \gamma = -\omega * \lambda \cdot q + \lambda_z\lambda_x + \omega^2(rp + \lambda_y), \\ \alpha' = -\omega * \lambda \cdot r + \lambda_x\lambda_y + \omega^2(pq + \lambda_z), \quad \beta' = \omega^2 q^2 + \lambda_y^2, \quad \gamma' = \omega * \lambda \cdot p + \lambda_y\lambda_z + \omega^2(qr - \lambda_x), \\ \alpha'' = \omega * \lambda \cdot q + \lambda_z\lambda_x + \omega^2(rp - \lambda_y), \quad \beta'' = -\omega * \lambda \cdot p + \lambda_y\lambda_z + \omega^2(qr + \lambda_x), \quad \gamma'' = \omega^2 r^2 + \lambda_z^2. \end{cases}$$

On écrit ces coefficients d'une manière plus simple en désignant par $\overline{Nx}$, $\overline{Ny}$, $\overline{Nz}$ les angles formés avec les axes par la direction ON de la composante λ_N. On a alors

$$(15) \begin{cases} \alpha = \omega^2 p^2 + \lambda_x^2, \quad \beta = \lambda_x\lambda_y + \omega^2(pq - \lambda_N \cos\overline{Nz}), \quad \gamma = \lambda_z\lambda_x + \omega^2(rp + \lambda_N \cos\overline{Ny}), \\ \alpha' = \lambda_x\lambda_y + \omega^2(pq + \lambda_N \cos\overline{Nz}), \quad \beta' = \omega^2 q^2 + \lambda_y^2, \quad \gamma' = \lambda_y\lambda_z + \omega^2(qr - \lambda_N \cos\overline{Nx}), \\ \alpha'' = \lambda_z\lambda_x + \omega^2(rp - \lambda_N \cos\overline{Ny}), \quad \beta'' = \lambda_y\lambda_z + \omega^2(qr + \lambda_N \cos\overline{Nx}), \quad \gamma'' = \omega^2 r^2 + \lambda_z^2 \end{cases}$$

Il existe entre ces coefficients diverses relations plus ou moins intéressantes ; ainsi l'on a

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = \omega^4 + \lambda^2, \quad (\beta'' - \gamma')^2 + (\gamma - \alpha'')^2 + (x' - \beta)^2 = 4\omega^4\lambda_N^2, \text{ etc.}$$

Le déterminant Δ n'est pas nul, en général ; pour qu'il le soit il faut que l'on ait $\omega = 0$ ou $\lambda_N = 0$, c'est-à-dire que *la vitesse angulaire soit nulle* ou *que l'accélération angulaire n'ait pas de composante normale à l'axe instantané*. En dehors de ces cas

exceptionnels que nous laisserons de côté, x, y, z ont des valeurs finies et déterminées pour chaque système de valeurs de j_x, j_y, j_z; donc : 1° il existe toujours dans le solide un point, et un seul, qui a une accélération donnée de grandeur et de direction; 2° il n'y a qu'un point dont l'accélération soit nulle, c'est le point fixe O; 3° tous les points du corps, situés dans un même plan passant par le point O, ont leurs accélérations normales à une même droite OQ.

13. Pour simplifier les formules, nous supposerons maintenant que l'on prenne pour direction OZ celle de l'axe instantané, pour OX celle de la projection ON de l'accélération angulaire sur le plan normal à OI, OY étant perpendiculaire à OX, OZ. Le plan IOL ou XZ qui contient l'axe instantané et l'accélération angulaire sera le *plan principal;* OX, OY, OZ seront *les directions principales*. Dans ce système d'axes coordonnés, on a

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega, \quad \lambda_x = \lambda_N, \quad \lambda_y = 0, \quad \lambda_z = \lambda_\omega,$$
$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0,$$

les formules (8) deviennent

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} j_x = -\omega^2 x - \lambda_\omega y, \\ j_y = \lambda_\omega x - \omega^2 y - \lambda_N z, \\ j_z = \lambda_N y. \end{cases}$$

Telles sont les composantes de l'accélération d'un point (x, y, z) parallèlement aux directions principales. Cherchons le lieu des points du corps qui, à l'instant considéré, ont une accélération *de grandeur donnée* j : ils vérifient l'équation

$$(17) \quad \ldots \quad (\omega^2 x + \lambda_\omega y)^2 + (\lambda_\omega x - \omega^2 y - \lambda_N z)^2 + \lambda_N^2 y^2 = j^2.$$

Ce lieu est une surface du second ordre dont O est le centre, qui a un point réel sur chaque direction partant du point O (10). C'est donc un *ellipsoïde*. Les surfaces qui répondent à des valeurs différentes du paramètre j sont concentriques et homothétiques; il suffit donc d'étudier la distribution des accélé-

rations sur l'une d'elles, par exemple, celle qui répond à $j = 1$, et que nous appellerons l'*ellipsoïde* (E).

14. Cherchons les points dont l'accélération est parallèle à l'une des directions principales : 1° Pour que l'accélération soit parallèle à OX, il faut et il suffit que $j_y = j_z = 0$, ce qui donne

$$y = 0, \quad \lambda_\omega x - \lambda_N z = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{z} = \frac{\lambda_\omega}{\lambda_N} = tg\,\overline{\lambda X}.$$

Ces équations représentent la droite OL. Donc *le lieu des points du solide dont l'accélération est parallèle à la direction principale* ON *est une droite, qui coïncide avec l'accélération angulaire;*

2° Si l'on pose $j_x = j_z = 0$, l'accélération est parallèle à OY; on a $x = 0$, $y = 0$, ce qui donne l'axe OZ : *le lieu des points dont l'accélération est normale au plan principal est une droite, qui se confond avec l'axe instantané de rotation* OI ;

3° Enfin les conditions $j_x = 0$, $j_y = 0$ conduisent aux équations

$$(18) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \omega^2 x + \lambda_\omega y = 0, \\ \lambda_\omega x - \omega^2 y - \lambda_N z = 0, \end{cases}$$

dont la première représente un plan passant par OZ et dont la trace FF' sur le plan XY (fig. 3) fait avec OX un angle i donné par l'équation

$$(19). \qquad \text{tg}\, i = -\frac{\omega^2}{\lambda_\omega}.$$

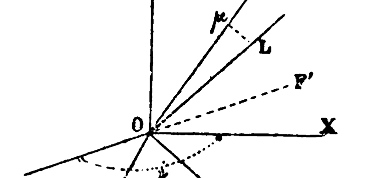


Fig. 3.

La seconde est celle d'un plan passant par l'origine, dont les traces sur les plans XY et XZ ont respectivement pour équations

$$\lambda_\omega x - \omega^2 y = 0, \qquad \lambda_\omega x - \lambda_N z = 0;$$

la première est une droite OG perpendiculaire à OF, la deuxième

est l'accélération angulaire OL. Ces droites OG, OL déterminent le plan GOL dont l'intersection avec le premier FOZ est la droite cherchée Oμ dont les points ont leurs accélérations parallèles à OZ. Mais OG est perpendiculaire au plan FOZ, donc Oμ est la projection de OL sur le plan FOZ, donc :

Menons par l'axe instantané OZ *un plan* FOZ *dont l'inclinaison sur le plan principal soit définie par l'équation* (19), *et projetons sur ce plan l'accélération angulaire* OL, *suivant* Oμ. *Cette droite* Oμ *sera le lieu des points du corps dont l'accélération est parallèle à l'axe instantané.*

Cherchons les cosinus directeurs de Oμ. Nous avons, par les équations (18),

$$\frac{x}{\lambda_\omega} = -\frac{y}{\omega^2} = \frac{\lambda_N z}{\omega^4 + \lambda_\omega^2},$$

d'où nous tirons immédiatement, en posant

$$(20) \quad \ldots \quad P = \sqrt{(\omega^4 + \lambda_\omega^2)(\omega^4 + \lambda^2)},$$

les formules cherchées,

$$(21) \quad \cos \overline{\mu x} = \frac{\lambda_\omega \lambda_N}{P}, \quad \cos \overline{\mu y} = -\frac{\omega^2 \lambda_N}{P}, \quad \cos \overline{\mu z} = \frac{\omega^4 + \lambda_\omega^2}{P}.$$

15. Si nous revenons à l'ellipsoïde d'égale accélération, nous simplifierons son équation en prenant pour axe des x' l'accélération angulaire OL, des y' l'axe instantané OI, des z' la droite Oμ. Les cosinus directeurs de ces nouveaux axes par rapport à OX, OY, OZ étant connus, on aura

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\lambda_N}{\lambda} x' + \frac{\lambda_\omega \lambda_N}{P} z', \\ y &= -\frac{\omega^2 \lambda_N}{P} z', \\ z &= \frac{\lambda_\omega}{\lambda} x' + y' + \frac{\omega^4 + \lambda_\omega^2}{P} z', \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tirera

$$(22) \quad \ldots \quad \begin{cases} \omega^2 x + \lambda_\omega y = \dfrac{\omega^2 \lambda_N}{\lambda} x', \\ \lambda_\omega x - \omega^2 y - \lambda_N z = -\lambda_N y', \\ \lambda_N y = -\dfrac{\omega^2 \lambda_N^2}{P} z', \end{cases}$$

et en substituant dans l'équation (17),

$$(23) \quad \ldots \quad \frac{x'^2}{\lambda^2} + \frac{y'^2}{\omega^4} + \frac{\lambda_N^2 z'^2}{P^2} = \frac{j^2}{\omega^4 \lambda_N^2}.$$

De cette égalité résulte le théorème suivant :

Les directions de l'accélération angulaire, de l'axe instantané de rotation et de la droite $O\mu$, *lieu des points dont l'accélération est parallèle à l'axe instantané, sont celles de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde d'égale accélération* (*).

Si l'on désigne par a', b', c' les demi-diamètres correspondant à ces directions dans l'ellipsoïde (E), on aura

$$(24) \quad \ldots \quad a' = \frac{\lambda}{\omega^2 \lambda_N}, \quad b' = \frac{1}{\lambda_N}, \quad c' = \frac{P}{\omega^2 \lambda_N^2};$$

ils sont respectivement proportionnels à λ, ω^2, $\frac{P}{\lambda_N}$. En les multipliant par j, on aura les demi-diamètres conjugués ayant respectivement les mêmes directions dans l'ellipsoïde qui répond à l'accélération j. On remarquera le rapport simple qui existe entre le rayon b' de l'ellipsoïde (E) dirigé suivant l'axe OI et la composante λ_N de l'accélération angulaire.

On aura aussi, par les formules (24),

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{1}{\omega^4 \lambda_N^2} \left(\lambda^2 + \omega^4 + \frac{P^2}{\lambda_N^2} \right),$$

et en remplaçant P^2 par sa valeur et observant que $a'^2 + b'^2 + c'^2$

(*) Ce théorème paraît dû à M. Schell (*Theorie der Bewegung und Kräfte*, t. I, p. 493).

est égal à la somme $a^2 + b^2 + c^2$ des carrés des demi-axes de l'ellipsoïde (E),

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\omega^4 + \lambda_\omega^2}{\omega^2 \lambda_N}.$$

16. Des équations (16), (22) et (23) découlent ces relations simples entre les composantes de l'accélération d'un point du corps parallèlement aux directions principales, et les coordonnées de ce point parallèlement aux diamètres conjugués de l'ellipsoïde (E) :

$$(25) \quad \ldots \quad j_x = -\frac{x'}{a'}, \quad j_y = -\frac{y'}{b'}, \quad j_z = -\frac{z'}{c'}.$$

Elles nous serviront à réaliser certaines constructions géométriques.

Remarquons immédiatement que le plan passant par le point O, dont les points ont leurs accélérations normales à une droite OQ (l, m, n), satisfait à l'équation

$$lj_x + mj_y + nj_z = 0,$$

ou, d'après les équations (25),

$$\frac{lx'}{a'} + \frac{my'}{b'} + \frac{nz'}{c'} = 0.$$

Le diamètre conjugué de ce plan, dans l'ellipsoïde (E), a pour équations par rapport au système d'axes OL, OI, Oμ, comme on sait,

$$\frac{\frac{x'}{a'^2}}{\frac{l}{a'}} = \frac{\frac{y'}{b'^2}}{\frac{m}{b'}} = \frac{\frac{z'}{c'^2}}{\frac{n}{c'}},$$

ou

$$\frac{\frac{x'}{a'}}{l} = \frac{\frac{y'}{b'}}{m} = \frac{\frac{z'}{c'}}{n}.$$

ce qui montre, en vertu des mêmes équations (25), que tout point pris sur ce diamètre aura son accélération parallèle à la droite OQ.

De là ce théorème intéressant, signalé par M. Gruey :

Lorsqu'un plan a ses accélérations perpendiculaires à une droite donnée OQ, *le diamètre conjugué de ce plan dans l'ellipsoïde* (E), *a ses accélérations parallèles à la droite* OQ.

Les formules (25) conduisent encore à de nombreuses conséquences qu'il suffit d'énoncer :

1° Le lieu des points dont l'accélération a une projection donnée sur la direction principale OX est un plan parallèle aux directions OI, $O\mu$; les points de ce plan situés sur un même ellipsoïde d'égale accélération ont leurs accélérations également inclinées sur OX; le plan passant par OI, $O\mu$ a ses accélérations normales à OX.

2° Le lieu des points dont l'accélération a une projection donnée sur la direction principale OY est un plan parallèle aux directions OL, $O\mu$; l'intersection de ce plan avec un ellipsoïde d'égale accélération est une ellipse, lieu des points dont l'accélération fait un angle donné avec OY; le plan passant par OL, $O\mu$ a ses accélérations normales à OY;

3° Le lieu des points dont l'accélération a une projection donnée sur l'axe instantané OI est un plan parallèle aux directions OL, OI ou au plan principal; les points d'intersection de ce plan avec un ellipsoïde d'égale accélération ont leurs accélérations également inclinées sur OI, et le plan principal lui-même a ses accélérations normales à l'axe instantané.

17. Reprenons les équations (16), multiplions-les respectivement par

$$\lambda_x = \lambda_N, \qquad \lambda_y = 0, \qquad \lambda_z = \lambda_\omega,$$

ajoutons-les; il vient

$$\lambda_* j = -\omega^2 \lambda_N x,$$

donc, j_λ désignant la projection de l'accélération d'un point (x, y, z) sur l'accélération angulaire, on a

$$(26) \quad \dots\dots\dots \quad j_\lambda = -\frac{\omega^2\lambda_N}{\lambda}x.$$

Ainsi, *la projection de l'accélération d'un point sur l'accélération angulaire, et celle du rayon vecteur de ce point sur la première direction principale* OX, *sont dans un rapport constant quel que soit ce point. Tout plan normal à* ON *a ses accélérations projetées en grandeur égale sur l'accélération angulaire, et le lieu des points dont l'accélération est normale à* OL *est le plan mené par le point fixe normalement à* ON.

Nous avons, par la troisième des équations (16),

$$(27) \quad \dots\dots\dots \quad j_\omega = \lambda_N y,$$

ce qui nous montre de même que *le lieu des points dont l'accélération est normale à l'axe instantané est le plan principal,* etc.

Enfin, pour chercher quelle est la composante de l'accélération qui ne dépend que de z, appelons A, B, C les cosinus directeurs d'une droite quelconque, et dans l'équation

$$(\mathrm{A}) \quad Aj_x + Bj_y + Cj_z = (-A\omega^2 + B\lambda_\omega)x - (A\lambda_\omega + B\omega^2 - C\lambda_N)y - B\lambda_N z$$

posons

$$A\omega^2 - B\lambda_\omega = \omega, \qquad A\lambda_\omega + B\omega^2 - C\lambda_N = 0,$$

d'où

$$\frac{A}{\lambda_\omega} = \frac{B}{\omega^2} = \frac{C\lambda_N}{\omega^4 + \lambda_\omega^2} = \frac{\lambda_N}{P}.$$

La direction cherchée est donc caractérisée par les cosinus directeurs

$$(28) \quad \dots \quad A = \frac{\lambda_\omega\lambda_N}{P}, \quad B = \frac{\omega^2\lambda_N}{P}, \quad C = \frac{\omega^4 + \lambda_\omega^2}{P}.$$

A, B, C ne diffèrent donc des cosinus directeurs de la droite $O\mu$ que par le signe de B, d'où le théorème suivant :

La direction sur laquelle il faut projeter les accélérations des points du corps pour que ces projections ne dépendent que de la coordonnée parallèle à OI, est une droite $O\mu'$ symétrique de $O\mu$ par rapport au plan principal.

On a alors, d'après l'équation (A),

$$(29) \quad \ldots\ldots \quad j_{\mu'} = -B\lambda_N z = -\frac{\omega^2\lambda_N^2}{P} z.$$

Ainsi : 1° *Tout plan normal à l'axe instantané a ses accélérations projetées en grandeur égale sur la droite $O\mu'$, et celui de ces plans qui passe par le point fixe a ses accélérations normales à $O\mu'$* ; 2° *Les projections du rayon vecteur d'un point sur l'axe instantané et de l'accélération de ce point sur la direction $O\mu'$ sont dans un rapport constant, quel que soit ce point.*

18. On peut mettre les formules (26), (27) et (29) sous une autre forme en ayant égard aux valeurs de a', b', c' déterminées par les équations (24) et introduisant, pour plus de symétrie, la direction OI′ ou ω' directement opposée à celle de l'axe instantané OI. On trouve alors

$$(30) \quad \ldots \quad j_\lambda = -\frac{x}{a'}, \quad j_{\omega'} = -\frac{y}{b'}, \quad j_{\mu'} = -\frac{z}{c'},$$

ce qui fait connaître les projections de l'accélération d'un point du corps sur OL, OI′, $O\mu'$ en fonctions très simples des coordonnées du point parallèlement aux directions principales.

On déduit d'ailleurs de ces formules la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a'^2 j_\lambda^2 + b'^2 j_{\omega'}^2 + c'^2 j_{\mu'}^2,$$

ce qui montre que *si l'on tire du point O des droites égales et parallèles aux accélérations des points situés sur une sphère ayant O pour centre, le lieu des extrémités de ces droites sera un ellipsoïde ayant aussi pour centre le point O.*

On tire encore immédiatement des équations (30) ces propriétés :



Tout point du solide pris sur la direction principale OX *a son accélération normale au plan passant par l'axe instantané et la direction* Oμ'. — *Tout point pris sur la direction principale* OY *a son accélération normale au plan passant par l'accélération angulaire et la droite* Oμ'. — *Tout point pris sur l'axe instantané* OZ *a son accélération normale au plan principal* IOL *ou* XOZ.

19. Les formules ci-dessus conduisent à diverses constructions générales. Considérons un point M(x', y', z') sur l'ellipsoïde (E). Le plan tangent en ce point coupera les axes OL, OI, Oμ aux distances respectives

$$\alpha = \frac{a'^2}{x'}, \quad \beta = \frac{b'^2}{y'}, \quad \gamma = \frac{c'^2}{z'},$$

et, si ϖ désigne la distance du centre O à ce plan tangent, on aura

$$\cos\overline{\varpi x'} = \varpi\frac{x'}{a'^2}, \quad \cos\overline{\varpi y'} = \varpi\frac{y'}{b'^2}, \quad \cos\overline{\varpi z'} = \varpi\frac{z'}{c'^2},$$

d'où

$$\frac{x'}{a'} = \frac{a'\cos\overline{\varpi x'}}{\varpi}, \quad \frac{y'}{b'} = \frac{b'\cos\overline{\varpi y'}}{\varpi}, \quad \frac{z'}{c'} = \frac{c'\cos\overline{\varpi z'}}{\varpi} \text{ (*)}.$$

Nous aurons donc, en faisant usage des relations (25),

$$\frac{j_x}{a'\cos\overline{\varpi x'}} = \frac{j_y}{b'\cos\overline{\varpi y'}} = \frac{j_z}{c'\cos\overline{\varpi z'}} = -\frac{1}{\varpi};$$

les composantes de l'accélération d'un point M, parallèlement aux directions principales, sont donc proportionnelles aux pro-

---

(*) On déduit de ces équations

$$\varpi = \sqrt{a'^2\cos^2\overline{\varpi x'} + b'^2\cos^2\overline{\varpi y'} + c'^2\cos^2\overline{\varpi z'}},$$

donc *la somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde sur la perpendiculaire abaissée du centre sur un plan tangent arbitraire est égale au carré de cette perpendiculaire.*

jections des demi-diamètres a', b', c' sur la normale à l'ellipsoïde en M. D'où cette construction :

Menons le plan tangent en M *à l'ellipsoïde* (E), *projetons les demi-diamètres de l'ellipsoïde dirigés suivant* OL, OI, Oμ *sur la perpendiculaire abaissée du point* O *sur le plan tangent, et portons ces projections respectivement sur les directions principales* OX, OY, OZ ; *leur résultante, prise en sens contraire, donnera la direction de l'accélération du point* M.

On tire aussi, des valeurs ci-dessus de α, β, γ,

$$\frac{x'}{a'} = \frac{a'}{\alpha}, \quad \frac{y'}{b'} = \frac{b'}{\beta}, \quad \frac{z'}{c'} = \frac{c'}{\gamma}, \text{(*)}$$

d'où

$$j_x = -\frac{a'}{\alpha}, \quad j_y = -\frac{b'}{\beta}, \quad j_z = -\frac{c'}{\gamma},$$

donc, si l'on mène un plan tangent en M à l'ellipsoïde, les rapports des demi-diamètres de l'ellipsoïde dirigés suivant OL, OI, Oμ, aux segments faits sur leurs directions respectives par le plan tangent en M, changés de signe, donnent les composantes de l'accélération du point M parallèlement aux directions principales OX, OY, OZ. De là cette construction :

Portons sur les directions principales OX, OY, OZ *les longueurs* a', b', c' *des demi-diamètres dirigés suivant* OL, OI, Oμ, *et par leurs extrémités des plans normaux à* OX, OY, OZ. *Du centre* O, *décrivons trois sphères ayant pour rayons respectifs les segments faits sur les directions* OL, OI, Oμ *à partir du point* O *par le plan tangent à l'ellipsoïde* (E) *en un point quelconque* M. *Les cônes de sommet* O *qui ont pour bases les sections des sphères respectivement par les trois plans ont une génératrice commune, dont la direction est celle de l'accélération du point* M.

(*) Ce qui conduit à cette autre propriété de l'ellipsoïde : *La somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques de l'ellipsoïde, divisés respectivement par les carrés des segments faits sur ces diamètres, à partir du centre, par un plan tangent arbitraire, est constante et égale à l'unité.*



30. Enfin, les équations (25) et (30) conduisent à la solution de plusieurs problèmes, dont l'un a été résolu au n° 11.

Étant donnée une droite OQ, *chercher le plan dont les accélérations, projetées sur* OQ, *ont une valeur donnée* ϖ.

Soient l, m, n les cosinus directeurs de OQ par rapport à OX, OY, OZ; l'équation

$$lj_x + mj_y + nj_z = \varpi$$

devient, par la substitution des valeurs (25),

$$\frac{lx'}{a'} + \frac{my'}{b'} + \frac{nz'}{c'} = -\varpi,$$

ce qui est l'équation du plan cherché rapportée à OL, OI, Oμ.

Mais $\frac{\varpi}{l}$, $\frac{\varpi}{m}$, $\frac{\varpi}{n}$ sont les segments α, β, γ faits sur les droites OX, OY, OZ à partir du point O, par le plan normal à OQ mené à la distance ϖ du point O, donc l'équation du plan peut s'écrire aussi

$$\frac{x'}{a'\alpha} + \frac{y'}{b'\beta} + \frac{z'}{c'\gamma} = -1,$$

et représente un plan qui coupe les *prolongements* des directions OL, OI, Oμ respectivement, à des distances $a'\alpha$, $b'\beta$, $c'\gamma$ du point O. Ce plan est donc facile à construire.

Le problème inverse est celui-ci : *Étant donné un plan* (A) *normal à une direction* OP, *trouver la droite* OQ *sur laquelle les accélérations du plan* (A) *sont projetées en grandeur égale.*

Soit

$$l_1x + m_1y + n_1z = \varpi_1$$

l'équation du plan (A), rapporté aux axes OX, OY, OZ. Les équations (30) nous donnent

$$a'l_1j_\lambda + b'm_1j_{\omega'} + c'n_1j_{\mu'} = -\varpi_1,$$

égalité que nous écrivons comme suit :

$$\begin{aligned}(a'l_1 \cos \overline{\lambda x} + b'm_1 \cos \overline{\omega' x} + c'n_1 \cos \overline{\mu' x})\, j_x \\ + (a'l_1 \cos \overline{\lambda y} + b'm_1 \cos \overline{\omega' y} + c'n_1 \cos \overline{\mu' y})\, j_y \\ + (a'l_1 \cos \overline{\lambda z} + b'm_1 \cos \overline{\omega' z} + c'n_1 \cos \overline{\mu' z})\, j_z = -\varpi_1.\end{aligned}$$

On voit que si l'on porte, sur les directions OL, OI′, Oμ' respectivement des longueurs $a'l_1, b'm_1, c'n_1$, la résultante Q de ces trois droites vérifiera l'équation

$$Q_x j_x + Q_y j_y + Q_z j_z = -\varpi_1,$$

ou

$$Q * j = -\varpi, \quad j \cos \overline{jQ} = -\frac{\varpi_1}{Q}.$$

Donc OQ *est la droite cherchée, et la projection des accélérations du plan* (A) *sur* OQ *est égale à* $-\frac{\varpi}{Q}$.

Résolvons encore cet autre problème : *Trouver le lieu des points du solide dont l'accélération est parallèle à une droite* OT.

Ces points satisfont aux équations

$$\frac{j_x}{\cos \overline{Tx}} = \frac{j_y}{\cos \overline{Ty}} = \frac{j_z}{\cos \overline{Tz}},$$

et par suite, à cause des équations (25), à celles-ci :

$$\frac{x'}{a' \cos \overline{Tx}} = \frac{y'}{b' \cos \overline{Ty}} = \frac{z'}{c' \cos \overline{Tz}}.$$

On portera donc, sur les directions principales OX, OY, OZ, respectivement, les demi-diamètres a', b', c', et on les projettera sur la droite OT. Ces projections, transportées respectivement sur les directions OL, OI, Oμ, donneront une résultante OS qui sera le lieu des points dont l'accélération est parallèle à OT.

§ IV. *Composantes tangentielle et normale de l'accélération.*

21. Cherchons maintenant les composantes de l'accélération j d'un point M du solide : 1° suivant la direction MV (fig. 4) de la vitesse de ce point, soit j_v ; 2° suivant la direction MP du rayon de rotation u, soit j_u ; 3° parallèlement à l'axe instantané OZ, soit j_ω. Ces trois directions sont rectangulaires.

Rappelons que l'accélération j a deux composantes (n° 5), l'une $\omega^2 u$ dirigée vers l'axe OI, qui tombe sur la direction MP et ne donne rien sur les deux autres; l'autre, égale à la vitesse due à l'accélération angulaire, et qui est normale au plan LOM. Or, la rotation λ autour de OL se décompose en trois autres : une rotation λ_ω autour de l'axe instantané OI; 2° une rotation $\lambda_N \cos\varphi$ autour de la projection OM_1 du rayon vecteur sur le plan XY, φ désignant l'angle que fait le plan ZOM avec le plan principal XZ, compté à partir de OX dans le sens $\overline{XY}$ jusqu'à 360°; 3° une rotation $\lambda_N \sin\varphi$ autour de la direction OM_2 parallèle et opposée à celle de la vitesse v. La première composante donne au point M une vitesse $\lambda_\omega u$ suivant MV; la deuxième une vitesse $\lambda_N \cos\varphi \,.\, MM_1 = \lambda_N \rho_\omega \cos\varphi$ normale au plan ZOM en sens opposé à MV; la troisième une vitesse $\lambda_N \sin\varphi . OM$, normale à OM dans le plan ZOM, et qui a par suite deux composantes $\lambda_N \sin\varphi.\rho \cos\overline{\omega\rho}$ suivant MP, $\lambda_N \sin\varphi.\rho \sin\overline{\omega\rho}$ parallèlement à OI. On a donc

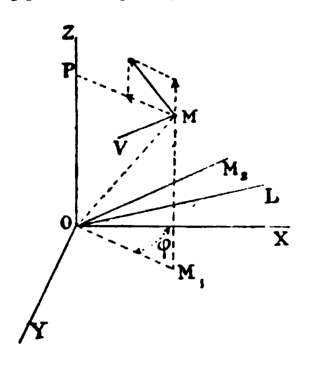


Fig. 4.

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} j_v = \lambda_\omega u - \lambda_N \rho_\omega \cos\varphi, \\ j_u = \omega^2 u + \lambda_N \rho_\omega \sin\varphi, \\ j_\omega = \lambda_N u \sin\varphi, \end{cases}$$

pour les expressions de composantes cherchées. On les trouverait également au moyen des formules (16) et des cosinus directeurs de MV, MP, OZ. Nous allons interpréter géométriquement ces composantes.

22. La première j_v peut s'écrire

$$j_v = \lambda\rho\,(\cos\overline{\omega\lambda}\sin\overline{\omega\rho} - \sin\overline{\omega\lambda}\cos\overline{\omega\rho}\cos\varphi),$$

ou, au moyen du triangle sphérique formé par les directions ω, λ, ρ,

$$(32) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; j_v = \lambda\rho \sin \overline{\lambda\rho} \cos \overline{\omega\rho\lambda}.$$

On en tire immédiatement ce résultat : *La composante tangentielle de l'accélération d'un point* M *du solide est mesurée par l'aire du parallélogramme construit sur l'accélération angulaire et sur le rayon vecteur* OM, *projetée sur le plan passant par l'axe instantané et le rayon* OM, *et prise avec le signe + ou le signe — suivant qu'elle tombe du même côté que l'axe* OI *ou du côté opposé, par rapport à* OM (*).

L'équation (31) peut encore être simplifiée. Élevons par le point fixe O (fig. 5), dans le plan ZOM, une perpendiculaire O*t* au rayon vecteur, et du même côté de ce rayon que l'axe OI. Le triangle sphérique OL, OM, O*t* nous donnera

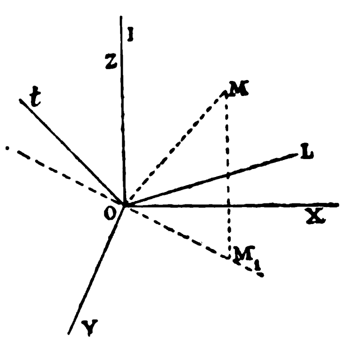


Fig. 5.

$$\cos \overline{\lambda t} = \sin \overline{\lambda\rho} \cos \overline{\omega\rho\lambda},$$

et par suite

$$(33) \quad . \; . \; . \; j_v = \lambda_t \rho .$$

Ainsi *la composante tangentielle de l'accélération s'obtient en multipliant le rayon vecteur par la projection de l'accélération angulaire sur la normale au cône que décrit ce rayon.*

Il est facile de trouver dans le corps le lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle. L'équation (32) nous donne, en effet, pour cela la condition

$$\cos \overline{\omega\rho\lambda} = 0,$$

ce qui montre que les plans menés par le rayon vecteur OM et

(*) Ce théorème et l'équation (31) dérivent d'ailleurs immédiatement de la remarque du n° 5.

l'axe instantané, d'une part, par OM et l'accélération angulaire OL, de l'autre, doivent être perpendiculaires l'un à l'autre. Le lieu cherché est donc celui de l'intersection de deux plans rectangulaires, menés par l'axe OI et la droite OL, et l'on sait qu'un tel lieu n'est autre chose que le cône du second degré (C_1) qui a pour arêtes opposées OI, OL, et dont les sections circulaires sont respectivement normales à ces deux directions (fig. 6). Si donc on prend sur OI une longueur arbitraire OA, qu'on élève la perpendiculaire AB terminée en B à l'accélération angulaire, que l'on décrive sur AB comme diamètre un cercle dont le plan soit normal à OI, le cône qui a pour sommet le point fixe et pour base ce cercle sera le lieu des points sans accélération tangentielle. Il est à remarquer que ce cône (C_1) est entièrement déterminé par les directions OI, OL, et ne dépend nullement des valeurs de ω, λ.

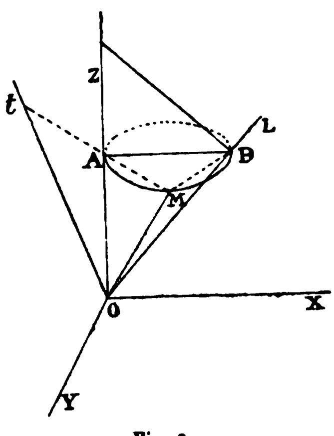


Fig. 6.

Prenant pour axes coordonnés Ox, Oz les bissectrices des deux angles supplémentaires compris entre l'axe instantané et l'accélération angulaire, pour Oy la normale OY au plan principal, l'équation du cône prendra la forme simple

$$\frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2} = \cot^2 \frac{\overline{\omega\lambda}}{2},$$

en sorte que Ox, Oy, Oz sont les axes principaux du cône.

Remarquons encore : 1° que l'angle AMB étant droit, la direction de la vitesse du point M passe par le point B ; 2° que l'équation (33) donne aussi, pour la condition d'une accélération tangentielle nulle,

$$\lambda_t = 0,$$

en sorte que la direction Ot est normale à OL pour tous les points du cône ci-dessus. On énoncera donc les propriétés suivantes :

Le lieu des points du corps sans accélération tangentielle est un cône (C_1) *du second degré, lieu géométrique des intersections de deux plans rectangulaires menés respectivement par l'axe instantané et par l'accélération angulaire, et qui a ses sections circulaires normales à ces deux droites* OI, OL, *le plan* IOL *étant un plan principal du cône.*

Le rapport des distances d'un point quelconque de ce cône (C_1) *aux bissectrices des deux angles supplémentaires formés par l'axe instantané et l'accélération angulaire est constant, et égal à la tangente de la moitié de l'angle* $\overline{\omega\lambda}$.

Tous les points situés sur le cône (C_1) *ont des vitesses qui vont rencontrer l'accélération angulaire.*

Si un angle droit ayant son sommet au point fixe se meut de manière que son plan passe toujours par l'axe instantané, et qu'un de ses côtés décrive un plan normal à l'accélération angulaire, l'autre côté décrira le cône (C_1), *lieu des points sans accélération tangentielle.*

23. La deuxième équation (31) peut aussi s'écrire plus simplement. Prenons sur l'axe OI (fig. 7) une longueur $OA = \omega^2$, et élevons AD perpendiculaire au plan principal du côté opposé à OY, et égal à λ_N. Menons $OD = \beta$. L'équation susdite nous donne

$$j_u = \rho\,(\omega^2 \sin \overline{\omega\rho} + \lambda_N \cos \overline{\omega\rho} \sin \varphi) = \beta\rho\,(\cos \overline{\omega\beta} \sin \overline{\omega\rho} + \sin \overline{\omega\beta} \cos \overline{\omega\rho} \sin \varphi),$$

et par le triangle sphérique formé par les directions (ω, β, ρ),

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots \quad j_u = \beta\rho \sin \overline{\beta\rho} \cos \overline{\omega\rho\beta}.$$

On voit déjà que *la composante de l'accélération d'un point* M *suivant le rayon de rotation a pour mesure l'aire du parallélogramme construit sur la droite constante* OD *et sur le rayon*



vecteur du point M, *projetée sur le plan normal à la vitesse de* M, *et prise avec le signe* + *ou le signe* — *suivant qu'elle tombe du même côté de* OM *que l'axe instantané ou du côté opposé.*

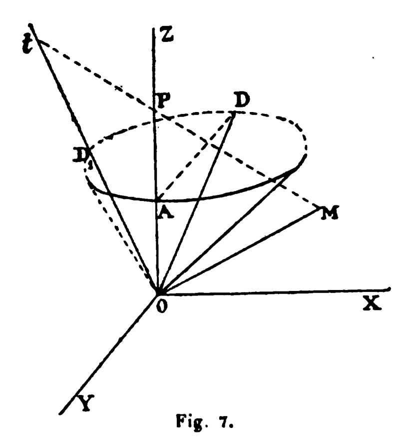


Fig. 7.

On a aussi

$$\cos \overline{\beta t} = \sin \overline{\beta \rho} \sin \overline{\omega \rho \beta},$$

d'où cette expression très simple

$$(35) \quad . \quad . \quad j_u = \beta_t \rho;$$

c'est-à-dire que *la composante de l'accélération suivant le rayon de rotation est le produit du rayon vecteur par la projection de la droite* OD *sur la normale au cône décrit par ce rayon vecteur.*

Ces équations (34) et (35) conduisent immédiatement aux propriétés suivantes, analogues à celles que nous avons déduites plus haut : *Le lieu des points du solide dont l'accélération normale à l'axe instantané est nulle est un cône* (C_2) *du second degré, lieu de l'intersection de deux plans rectangulaires menés respectivement par l'axe instantané* OI *et la droite* OD, *définie ci-dessus. Les sections circulaires de ce cône sont perpendiculaires, les unes à l'axe instantané, les autres à la droite* OD, *et ont leurs diamètres compris entre ces deux droites.*

Le cône (C_2) *serait encore engendré par un côté d'un angle droit ayant son sommet au point fixe, son plan passant par l'axe instantané, l'autre côté décrivant le plan normal à la droite* OD.

24. Les cônes (C_1) et (C_2) se coupent suivant deux génératrices. L'une n'est autre chose que l'axe instantané, l'autre est une droite (fig. 8) OH, lieu des points du corps pour lesquels les composantes j_v et j_u sont nulles, pour lesquels, par conséquent, l'accélération j se réduit à sa composante j_ω parallèle à OI. Cette droite n'est autre que la droite Oμ que nous avons déterminée au n° 14,

et qui forme avec les directions OI, OL un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde (E). Comme elle est une génératrice commune aux cônes (C_1) et (C_2), le plan mené par OH et par l'axe instantané est à la fois normal aux plans OHB, OHD menés par OH et par les directions respectives OL, OD, donc ces dernières sont, avec OH, dans un même plan normal au plan IOH. De là ces constructions : 1° *Après avoir tracé la droite* OD *dans le plan* YZ *par la règle indiquée ci-dessus, on mènera un plan par cette droite et par l'accélération angulaire; puis, par l'axe* OI, *on mènera un plan normal à celui-là; l'intersection sera la droite* OH, *lieu des points qui ont leurs accélérations parallèles à* OI ; 2° *si, au contraire,* OH *est déjà connu, le plan mené par* OH *et par* OL *tracera, sur le plan mené par* OI *normalement au plan principal, la droite* OD.

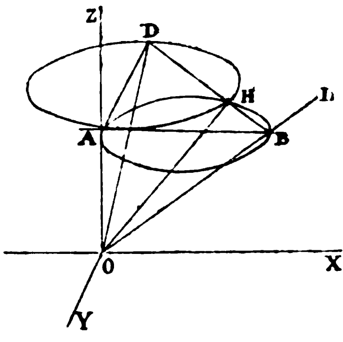


Fig. 8.

On peut encore observer que les vitesses des points du corps situés sur la droite OH vont rencontrer à la fois l'accélération angulaire et la droite OD, et que les points situés sur OD ont leurs accélérations parallèles au plan principal et normales à l'accélération angulaire.

25. Il reste à considérer la composante j_ω parallèle à OI. La troisième équation (31) donne

$$j_\omega = \lambda_N u \sin\varphi,$$

ce qui montre que *cette composante a pour mesure l'aire du parallélogramme construit sur l'accélération angulaire et sur le rayon vecteur* OM *du point mobile, projetée sur le plan normal à l'axe instantané.*

Pour que j_ω soit nul, il faut et il suffit que $\sin\varphi$ le soit, ce

qui détermine le plan principal ; la condition $u = 0$ ne donnerait d'ailleurs que des points situés dans ce plan. On retrouve donc cette propriété déjà connue, que le lieu des points dont l'accélération est normale à l'axe instantané n'est autre que le plan principal.

26. Pour construire la normale principale et le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque M, il suffit de trouver la direction de la composante de j normale à la trajectoire, ou la résultante des accélérations j_u et j_ω.

Remarquons d'abord que si C est le centre de courbure de la trajectoire du point M et MC son rayon de courbure, OC sera perpendiculaire à MC, car O est évidemment le centre de la sphère osculatrice de la trajectoire, et l'on sait que ce point se trouve sur la normale au plan du cercle osculateur menée par son centre. La droite OC est donc l'*axe* du cercle osculateur de la trajectoire du point M, et de plus, cet axe est le même pour tous les points du solide situés sur un même rayon OM, car on a vu que tous ces points ont leurs vitesses et leurs accélérations parallèles et proportionnelles à leurs distances au point O. Cherchons donc à déterminer cet axe OC, et appelons ψ l'angle compris entre sa direction et celle de l'axe OI. On voit immédiatement que cet angle est égal à l'inclinaison du rayon de courbure MC sur le rayon de rotation MP, d'où

$$\cot\psi = \frac{j_u}{j_\omega} = \frac{\omega^2 u + \lambda_N \rho_\omega \sin\varphi}{\lambda_N u \sin\varphi},$$

ou

$$(36) \quad \ldots\ldots \quad \cot\psi = \cot\overline{\omega\rho} + \frac{\omega^2}{\lambda_N \sin\varphi}.$$

Mais si nous portons sur la normale OY au plan principal (fig. 9) une longueur $OK = \lambda_N$, que nous projetterons en OK′ sur la droite OM_1 parallèle à PM ; que nous élevions K′EF parallèle à OI, et qu'à partir du point E où cette parallèle coupe le rayon

vecteur OM nous portions une longueur $EF = \omega^2$, nous aurons évidemment

$$OK' = \lambda_N \sin \varphi,$$

$$\cot IOF = \frac{FK'}{OK'} = \frac{EF + EK'}{OK'} = \frac{\omega^2}{\lambda_N \sin \varphi} + \cot \overline{\omega\rho},$$

donc $IOF = \psi$, et la droite OF sera l'axe de courbure cherché. De là cette construction très simple du centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque du solide :

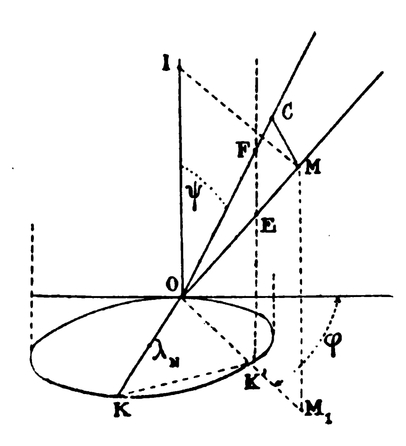


Fig. 9.

On construira d'abord un cylindre tangent au plan principal le long de l'axe instantané OI, *à droite de l'accélération angulaire* OL *par rapport à la direction* OI, *et ayant pour section droite un cercle de diamètre* λ_N.

Soit OM *le rayon tiré du point fixe* O *à un point quelconque du solide,* E *le point où il traverse le cylindre ci-dessus; portons à partir de* E, *sur la génératrice et dans le sens positif de l'axe* OI, *une longueur constante* $EF = \omega^2$. *La droite* OF *sera l'axe du cercle osculateur pour la trajectoire d'un point quelconque* M *de* OM; MC, *perpendiculaire sur* OF, *sera la normale principale et* C *le centre de courbure de cette trajectoire.*

Observons que cette construction est tout à fait générale, l'angle $\overline{\omega\rho}$ du rayon vecteur avec l'axe instantané pouvant surpasser 90°, l'angle ψ également. Quant à φ, on peut se borner à le faire varier de 0° à 180°, car les plans passant par l'axe OI qui répondent à $\varphi > 180°$ renferment les prolongements des rayons vecteurs pour lesquels $\varphi < 180°$, et comme l'axe de courbure est unique pour tous les points d'un même rayon, il suffit de le déterminer pour les points situés, sur ce rayon, d'un même côté du point O.

27. La formule (36) et la construction qui en résulte permettant de suivre facilement la variation du centre de courbure de la trajectoire quand on fait varier, soit l'inclinaison du rayon ρ sur l'axe instantané, soit l'azimut φ de ce rayon.

Dans le plan principal, on a $\varphi = 0$, $\cot\psi = \infty$, $\psi = 0$, la droite OF coïncide avec l'axe instantané. Ainsi *les points du corps situés dans le plan passant par l'axe instantané et l'accélération angulaire décrivent des trajectoires dont le rayon de courbure est normal à l'axe instantané et dont le centre de courbure est sur cet axe.*

Dans un plan quelconque mené par OI, l'inclinaison de la droite OF sur OI augmente avec l'inclinaison du rayon vecteur OM, mais la différence des cotangentes des angles ψ et $\overline{\omega\rho}$ reste constante. Lorsque le rayon OM devient normal à OI, $\overline{\omega\rho} = 90°$, on a

$$\cot\psi = \frac{\omega^2}{\lambda_N \sin\varphi}.$$

Les points du solide situés dans le plan mené par O normalement à OI, ont donc encore les centres de courbure de leurs trajectoires placés du même côté que l'axe instantané par rapport à eux-mêmes. Mais si l'on considère les points pour lesquels on a

$$\cot\overline{\omega\rho} = -\frac{\omega^2}{\lambda_N \sin\varphi}$$

et pour lesquels, comme on le voit immédiatement, $j_u = 0$, on aura par l'équation (36) $\cot\psi = 0$, $\psi = 90°$, et l'on en conclura que *les points du corps situés sur le cône* (C_2), ou pour lesquels la composante de l'accélération suivant le rayon de rotation s'évanouit, *ont les rayons de courbure de leurs trajectoires parallèles à l'axe instantané, et par suite, leurs centres de courbure dans le plan de l'équateur du solide.* Le rayon de courbure MC est dans le sens de l'axe positif OI pour les points dont le rayon ρ fait un angle obtus avec OI, et en sens contraire pour les points dont le rayon fait un angle aigu avec OI (fig. 10).

Enfin, si l'on fait croître l'angle $\overline{\omega\rho}$ de manière que le rayon

vecteur OM tombe dans l'intérieur du cône (C_2), l'axe de courbure OF fera avec OI un angle supérieur à 90°, et le rayon de courbure de la trajectoire sera dirigé, à partir du point M, dans un sens opposé à celui où se trouve l'axe instantané de rotation. On peut donc dire, dans un certain sens, que le cône (C_2) partage les points du solide en deux groupes; les uns, hors du cône, tournent la concavité de leur trajectoire vers l'axe instantané; les autres, dans l'intérieur du cône, tournent la convexité de leur trajectoire vers cet axe. Le cône (C_2) joue ici un rôle analogue à celui que joue, dans les mouvements plans, le cercle auquel nous avons donné le nom de *cercle d'inflexion.*

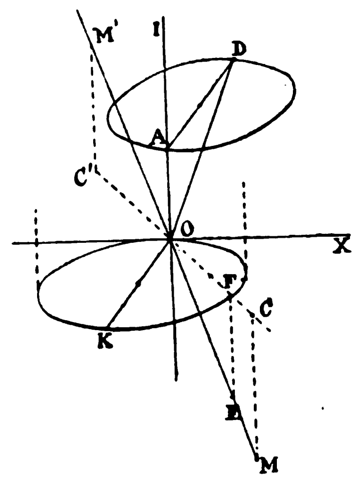


Fig. 10.

La construction donnée plus haut manifeste encore cette propriété : les rayons vecteurs qui rencontrent la surface du cylindre aux différents points d'une même section droite déterminent un cône. Les axes de courbure des trajectoires des différents points de cône forment un deuxième cône, de sommet O, dont la directrice est une autre section droite du même cylindre.

28. Dans son mémoire sur le groupement géométrique des accélérations, M. Gruey traite ce problème : Trouver un plan passant par le point fixe et tel qu'il contienne les accélérations de tous ses points. D'après le théorème du n° 16, ce problème revient à celui-ci : *trouver sur l'ellipsoïde* (E) *un point tel que son accélération soit normale à la surface.* Ce point sera l'extrémité du diamètre conjugué du plan jouissant de la propriété demandée. On reconnait aussi, par la construction du n° 11, que la normale à ce plan est une génératrice du cône (C_1), lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle.

§ V. *Accélérations des points d'un solide libre.*

29. Considérons un solide libre en mouvement dans l'espace; soit, à un instant donné, OI l'axe instantané de rotation et de glissement ou *axe de Mozzi*, et appelons *surface de Mozzi* la surface réglée qui est le lieu des positions successives de cet axe dans l'espace. Le mouvement du solide se compose d'une rotation ω autour de OI, accompagnée d'une translation, de vitesse Q, le long de cet axe; Q sera $\gtrless 0$ suivant que la vitesse de glissement sera dans le sens OI de l'axe positif de rotation, ou en sens contraire.

Imaginons un point mobile qui coïnciderait, à chaque instant, avec le *point central* O (*) de la génératrice OI de la surface de Mozzi, et décrirait la *ligne de striction* ou l'*arête de rebroussement* de cette surface selon qu'elle serait gauche ou développable. Nommons x_0, y_0, z_0, w les coordonnées et la vitesse de ce point mobile par rapport à un système d'axes rectangulaires *fixe*. Les composantes de la vitesse v d'un point quelconque M (x, y, z) du solide ont pour expressions, d'après cela,

$$v_x = Q_x + q(z - z_0) - r(y - y_0), \text{ etc.},$$

d'où, dérivant par rapport au temps et appelant λ l'accélération angulaire OL rapportée au point O du solide,

$$(37) \qquad j_x = \frac{dQ_x}{dt} - (qw_z - rw_y) + \lambda_y(z - z_0) - \lambda_z(y - y_0) + qv_z - rv_y, \text{ etc.},$$

car on a

$$\frac{dx_0}{dt} = w_x, \quad \frac{dy_0}{dt} = w_y, \cdots$$

Observons d'ailleurs que la vitesse Q étant dirigée suivant OI, on a

$$qQ_z - rQ_y = 0, \qquad rQ_x - pQ_z = 0, \cdots,$$

(*) Chasles, *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite.*

et l'on peut remplacer dans la formule précédente les composantes v_x, v_y, ... de la vitesse totale du point M par les composantes v'_x, v'_y de sa vitesse due à la rotation du solide autour de l'axe de Mozzi. Si l'on désigne d'ailleurs par J l'accélération du point du solide qui est actuellement en O, et pour lequel on a $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $v'_x = 0$, $v'_y = 0$, $v'_z = 0$, l'équation ci-dessus deviendra

$$j_x = J_x + \lambda_y (z - z_0) - \lambda_z (y - y_0) + qv'_z - rv'_y,$$

et l'on aura deux autres équations semblables pour j_y, j_z. On en conclut que, *à chaque instant du mouvement d'un solide libre, l'accélération d'un point quelconque* M *est la résultante* 1° *d'une accélération égale et parallèle à celle du point qui est actuellement en* O; 2° *de l'accélération qu'aurait le point* M *si, le point* O *étant fixe, l'axe instantané et l'accélération angulaire gardaient leur grandeur et leur direction actuelles.*

Ce théorème subsiste, d'après un principe connu, si l'on prend au lieu du point O tout autre point du solide pour y rapporter l'axe instantané, mais l'accélération J présente, pour le point O, des propriétés particulières, comme on va le voir.

30. Les équations (37) donnent évidemment

$$(38) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} J_x = \dfrac{dQ_x}{dt} - (qw_z - rw_y), \\[2ex] J_y = \dfrac{dQ_y}{dt} - (rw_x - pw_z), \\[2ex] J_z = \dfrac{dQ_z}{dt} - (pw_y - qw_x). \end{cases}$$

Mais on a

$$Q_x = Q \cos \overline{\omega x}, \quad \frac{dQ_x}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cos \overline{\omega x} + Q \frac{d \cos \overline{\omega x}}{dt},$$

et si nous désignons comme précédemment par λ_ω et λ_n les com-

posantes de l'accélération angulaire OL suivant l'axe OI et suivant une direction ON normale à OI, nous aurons

$$\frac{d.\cos \overline{\omega x}}{dt} = \frac{\lambda_N}{\omega} \cos \overline{Nx};$$

d'autre part, $qw_z - rw_y$ est la composante parallèle à l'axe des x de la vitesse, due à la rotation ω, du point W, extrémité de la droite qui figure la vitesse w du point mobile O, et comme cette vitesse w, tangente à la surface de Mozzi au point central, est dans le plan normal au plan principal IOL si la surface est gauche, ce qui est le cas général, la vitesse du point W sera parallèle à ON et de sens contraire (*), de sorte que l'on aura

$$qw_z - rw_y = -\omega w \sin \overline{\omega w} \cos \overline{NX}.$$

Raisonnant de même sur les composantes J_y, J_z, on aura les formules suivantes :

$$(39) \quad \begin{cases} J_x = \dfrac{dQ}{dt} \cos \overline{\omega x} + \left(\omega w \sin \overline{\omega w} + \dfrac{Q\lambda_N}{\omega}\right) \cos \overline{Nx}, \\ J_y = \dfrac{dQ}{dt} \cos \overline{\omega y} + \left(\omega w \sin \overline{\omega w} + \dfrac{Q\lambda_N}{\omega}\right) \cos \overline{Ny}, \\ J_z = \dfrac{dQ}{dt} \cos \overline{\omega z} + \left(\omega w \sin \overline{\omega w} + \dfrac{Q\lambda_N}{\omega}\right) \cos \overline{Nz}. \end{cases}$$

De là ce théorème : *Lorsque la surface de Mozzi est gauche, l'accélération du point du solide qui coincide avec le point central de l'axe de Mozzi est dans le plan principal. Elle se compose 1° d'une accélération* J_ω *dirigée suivant l'axe de Mozzi et égale à la dérivée de la vitesse de glissement par rapport au temps; 2° d'une accélération* J_N *normale à la surface de Mozzi et ayant pour expression*

$$\omega w \sin \overline{\omega w} + \frac{Q\lambda_N}{\omega}.$$

(*) Si la vitesse w est dirigée, comme dans la figure, *en avant* du plan principal; sinon on supposera l'angle $\overline{\omega w}$ négatif et la formule subsistera.

Il faut, bien entendu, tenir compte des signes de Q et de sin $\overline{\omega w}$.

Si la surface de Mozzi était développable, le plan principal IOL se confondrait avec le plan tangent tout le long de l'axe OI, et la direction ON serait dans le plan tangent; de plus, la vitesse w aurait la direction de l'axe instantané, donc

$$qw_z - rw_y = 0, \quad \text{etc.};$$

les valeurs de J_x, J_y, J_z se réduiraient à

$$J_x = \frac{dQ_x}{dt}, \quad J_y = \frac{dQ_y}{dt}, \quad J_z = \frac{dQ_z}{dt}.$$

Nous ne nous occuperons pas davantage de ce cas intéressant.

31. Si l'on place l'origine des coordonnées au point O, on a

$$(40) \quad \ldots \quad \begin{cases} j_x = J_x + \lambda_y z - \lambda_z y + qv'_z - rv'_y, \\ j_y = J_y + \lambda_z x - \lambda_x z + rv'_x - pv'_z, \\ j_z = J_z + \lambda_x y - \lambda_y x + pv'_y - qv'_x, \end{cases}$$

et en ayant égard à la composition de l'accélération J donnée plus haut et aux propriétés établies au numéro 5, on trouvera cette règle : *L'accélération d'un point quelconque* M *d'un solide libre est la résultante* 1° *d'une accélération commune à tous les points, égale à* $\frac{dQ}{dt}$ *et parallèle à l'axe de Mozzi;* 2° *d'une accélération commune à tous les points, égale à*

$$\omega w \sin \overline{\omega w} + \frac{Q\lambda_N}{\omega},$$

parallèle à la normale à la surface de Mozzi au point central O *de l'axe instantané ;* 3° *d'une accélération centripète* $\omega^2 u$ *dirigée vers l'axe de Mozzi;* 4° *de la vitesse due à une rotation représentée par l'accélération angulaire* OL.

32. Nous pouvons maintenant généraliser quelques-uns des théorèmes établis au § II. Prenons un point déterminé A dans

le solide libre; appelons respectivement V et J sa vitesse et son accélération à l'instant considéré; v, j celles d'un point quelconque M du solide; v', j' la vitesse et l'accélération du point M dans le mouvement relatif autour du point A. Comme j est la résultante de J et de j', on a

$$\omega * j = \omega * J + \omega * j',$$

et la relation (10) nous donnant

$$\omega * j' = -\lambda * v',$$

nous aurons

$$\omega * j = \omega * J - \lambda * v'.$$

Mais v est la résultante de V, v', donc

$$\lambda * v = \lambda * V + \lambda * v',$$

donc enfin

$$\omega * j + \lambda * v = \omega * J + \lambda * V.$$

Le point A est un point déterminé du corps. Donc, *à chaque instant, dans le mouvement quelconque d'un solide libre, la somme des produits géométriques de l'axe instantané par l'accélération d'un point quelconque et de l'accélération angulaire par la vitesse de ce même point, est constante quel que soit ce point.*

Prenons pour A le point du solide qui coïncide avec le point central O; V se confondra avec Q, J avec la résultante des accélérations J_ω et J_N définies ci-dessus; nous aurons donc

$$\lambda * V = \lambda_\omega * Q + \lambda_N * Q = Q \frac{d\omega}{dt},$$

$$\omega * J = \omega * J_\omega + \omega * J_N = \omega \frac{dQ}{dt},$$

car Q est perpendiculaire à λ_N et ω à J_N. De là l'équation

$$\omega * j + \lambda * v = \frac{d.\omega Q}{dt}.$$

A chaque instant, dans le mouvement d'un solide libre, la somme des produits géométriques de l'axe instantané par l'accélération d'un point quelconque du solide, et de l'accélération angulaire par la vitesse du même point, est égale à la dérivée par rapport au temps du produit des vitesses de rotation et de glissement du solide.

Multiplions les deux membres de l'équation par la masse du point, m, et faisons la somme pour tous les points du solide. En conservant les notations du numéro 6, nous trouverons

$$\omega * R + \lambda * S = M\frac{d.\omega Q}{dt},$$

c'est-à-dire que

A chaque instant du mouvement d'un solide libre, la somme des produits géométriques de l'axe instantané de rotation par la résultante des forces extérieures, et de l'accélération angulaire par la résultante des quantités de mouvement, est égale à la masse du corps multipliée par la dérivée, par rapport au temps, du produit des vitesses de rotation et de glissement du solide.

33. Partant de l'équation évidente

$$v' * j = v' * J + v' * j',$$

multipliant par m et faisant la somme pour tous les points, on aura

$$\Sigma m v' * j = J \Sigma m v' \cos \overline{v'J} + \Sigma m v' * j'.$$

Représentons par S′ et K′ respectivement, la résultante et l'axe du couple résultant, relatifs au point P, des quantités de

mouvement de tous les points *dues à la rotation du solide* autour du point A. Nous aurons donc

$$\Sigma mv' \cos \overline{v'J} = S' \cos \overline{S'J},$$

et d'autre part, d'après un calcul fait au numéro 7,

$$\Sigma mv' * j' = \lambda * K'.$$

De là donc

$$\Sigma mv' * j = J * S' + \lambda * K'.$$

Enfin, on a aussi, comme au numéro 7,

$$\Sigma mv' * j = \omega * G,$$

G désignant toujours l'axe du couple résultant des forces extérieures relatif au point A. De là, enfin,

(41) . . . . . $\omega * G = J * S' + \lambda * K'$.

Transformons encore cette équation en désignant par v'_1 la vitesse, due à la rotation autour du point A, du centre de gravité du solide. On voit facilement que

$$S' \cos \overline{S'J} = Mv'_1 \cos \overline{v'_1 J},$$

donc

$$J * S' = J * Mv'_1.$$

De même K étant l'axe d'impulsion total, on a en plaçant l'origine des coordonnées au point A,

$$\begin{aligned} K_x &= \Sigma m(yv_z - zv_y) = \Sigma m(yV_z - zV_y) + \Sigma m(yv'_z - zv'_y) \\ &= M(y_1V_z - z_1V_y) + K'_x, \end{aligned}$$

et deux équations semblables pour K_y, K_z. Remarquons que si k désigne le moment, par rapport au point A, de la quantité de mouvement du centre de gravité en supposant que la masse y

soit réunie et que sa vitesse se réduise à celle de la translation V, on aurait

$$k_x = M(y_1 V_z - z_1 V_y),$$

et de même pour k_y, k_z; d'où l'on conclut, par les relations ci-dessus, que K est la résultante de k et de K', donc

$$\lambda * K' = \lambda * K - \lambda * k,$$

en sorte que l'équation (41) prend la forme

$$(42) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \omega * G = \lambda * K + J * Mv'_1 - \lambda * k.$$

Cette équation subsiste quel que soit le point A.

1° Choisissons pour ce point A le centre de gravité du corps; v'_1 et k s'évanouissant, on a

$$\omega * G = \lambda * K,$$

d'où cette belle propriété du centre de gravité : *Dans un solide libre en mouvement, à chaque instant, le produit géométrique de l'axe instantané par l'axe du couple résultant des forces extérieures relatif au centre de gravité du corps, est égal au produit géométrique de l'accélération angulaire par l'axe d'impulsion relatif au même point.*

2° Prenons pour A le point central O de l'axe de Mozzi. Nous aurons d'abord

$$J * v'_1 = J_N * v'_1,$$

car v'_1 est normal à OI et par suite à J_ω. Prenons, pour un instant, OI pour l'axe des z et le plan principal IOL pour le plan XZ. Il viendra

$$v'_{1x} = -\omega y_1, \qquad v'_{1y} = \omega x_1, \qquad v'_{1z} = 0,$$

d'où

$$J * Mv'_1 = -M\omega J_N y_1.$$

D'autre part, à cause de

$$V_x = 0, \qquad V_y = 0, \qquad V_z = Q,$$



on aura

$$k_x = MQy_1, \qquad k_y = -MQx_1, \qquad k_z = 0,$$

d'où

$$\lambda * k = MQ\lambda_N y_1,$$

et l'équation (42) deviendra

$$\omega * G = \lambda * K - My_1(\omega J_N + Q\lambda_N),$$

ou, à cause de la valeur de J_N,

$$\omega * G = \lambda * K - My_1(2Q\lambda_N + \omega^2 w \sin \overline{\omega w}).$$

Nous remarquons que si y_1 est nul, le dernier terme disparaît, et l'on retrouve l'équation $\omega * G = \lambda * K$, donc *la relation* (12) *subsiste lorsqu'on prend pour centre de réduction, au lieu du centre de gravité, le point central de l'axe de Mozzi, pourvu que le centre de gravité soit dans le plan principal.*

34. Soit ρ le rayon vecteur mené du point A à un point quelconque M du solide ; nous aurons

$$\rho * j = \rho * J + \rho * j' = \rho * J - v'^2,$$

d'après une formule du numéro 8. Nous aurons donc

$$\Sigma\rho * mj = \Sigma\rho * mJ - \Sigma m v'^2.$$

Mais on voit immédiatement que

$$\Sigma\rho * mJ = J\Sigma m\rho \cos \overline{\rho J} = MJ * \rho_1,$$

ρ_1 se rapportant au centre de gravité ; on a vu, d'autre part (8), que

$$\Sigma m v'^2 = \omega * K',$$

donc

$$\Sigma m v'^2 = \omega * K - \omega * k,$$

et l'équation ci-dessus devient

$$(43) \quad . \; . \; . \; . \; \Sigma\rho * mj + \omega * \mathrm{K} = \rho_1 * \mathrm{MJ} + \omega * k.$$

Mais mj est ce qu'on nomme souvent la force conservée du point M. On dira donc que, *dans le mouvement d'un corps libre, la somme des produits géométriques des rayons vecteurs menés d'un point donné* A *du corps aux différents points, par les forces conservées de ceux-ci, et du produit géométrique de l'axe instantané par l'axe d'impulsion relatif au point* A, *a la même valeur que si toute la masse était réunie au centre de gravité du corps et y était animée du même mouvement que le point* A.

Si l'on fait coïncider le point A avec le centre de gravité, $\rho_1 = 0$, $k = 0$, l'équation (43) se réduit à

$$\Sigma\rho * mj = - \omega * \mathrm{K},$$

d'où cet autre énoncé : *La somme des produits géométriques des forces conservées de tous les points par leurs rayons vecteurs tirés du centre de gravité est égale et de signe contraire au produit géométrique de l'axe instantané par l'axe d'impulsion relatif au même point.*

§ VI. *Étude géométrique des accélérations des points d'un solide libre.*

35. Nous simplifierons les équations (39) en prenant pour axe des z l'axe de Mozzi OI, dirigeant l'axe des x suivant la normale ON à la surface de Mozzi, et l'axe des y normalement au plan principal IOL. Nous aurons ainsi

$$\mathrm{J}_x = \mathrm{J}_{\mathrm{N}} = \omega w \sin \overline{\omega w} + \frac{\mathrm{Q}\lambda_{\mathrm{N}}}{\omega},$$
$$\mathrm{J}_y = 0,$$
$$\mathrm{J}_z = \mathrm{J}_\omega = \frac{d\mathrm{Q}}{dt}.$$



et en opérant comme au numéro **13**, il viendra

$$(44) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} j_x = J_N - \omega^2 x - \lambda_\omega y, \\ j_y = \lambda_\omega x - \omega^2 y - \lambda_N z, \\ j_z = J_\omega + \lambda_N y. \end{cases}$$

Pour qu'un point du solide ait une accélération nulle, il faut qu'il vérifie les équations

$$(45) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \omega^2 x + \lambda_\omega y = J_N, \\ \lambda_\omega x - \omega^2 y - \lambda_N z = 0, \\ \lambda_N y = - J_\omega. \end{cases}$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & \lambda_\omega & 0 \\ \lambda_\omega & -\omega^2 & -\lambda_N \\ 0 & \lambda_N & 0 \end{vmatrix} = \omega^2 \lambda_N^2$$

ne pouvant être nul que si $\omega = 0$, ou si $\lambda_N = 0$, le point cherché existera toujours et sera unique, sauf dans ces cas particuliers.

Construisons d'abord, comme au numéro **14**, la droite $O\mu$ qui a pour équations (fig. 11)

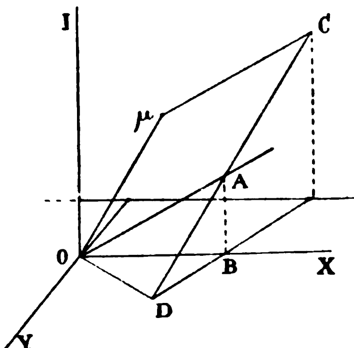


Fig. 11.

$$\omega^2 x + \lambda_\omega y = 0,$$
$$\lambda_\omega x - \omega^2 y - \lambda_N z = 0.$$

La première équation (45) nous montre qu'un plan parallèle au plan $IO\mu$, qui coupe l'axe OX à la distance $OB = \frac{J_N}{\omega^2}$, contiendra le point cherché. La deuxième montre que ce point est aussi dans le plan μOL mené par l'accélération angulaire et la droite $O\mu$. La droite AD, intersection de ces deux plans, passe donc par le point d'accélération

nulle. Enfin, la troisième équation (45) fait voir que le plan parallèle au plan principal et situé à la distance $-\frac{J_\omega}{\lambda_N}$ de celui-ci, renferme encore le point demandé. Observons d'ailleurs que la longueur OA a pour expression

$$\frac{OB}{\cos \overline{\lambda N}} = \frac{J_N}{\omega^2 \cos \overline{\lambda N}},$$

et nous aurons la construction suivante : *Sur l'accélération angulaire* OL, *à partir du point central* O, *on prend une longueur* OA *égale à* $\frac{J_N}{\omega^2 \cos \overline{\lambda N}}$; *par le point* A, *on mène une parallèle* AC *à la droite* $O\mu$ *que nous avons définie dans la rotation autour d'un point fixe* O. *Cette parallèle perce le plan mené parallèlement au plan principal, à une distance de ce dernier égale à* $-\frac{1}{\lambda_N}\frac{dQ}{dt}$, *en un point* C *qui est le point du solide dont l'accélération est nulle.*

36. Ce point C est le *centre instantané des accélérations.* En combinant les équations (44) et (45), on verra sans peine que si l'origine des coordonnées est au point C et si x, y, z désignent encore les coordonnées d'un point quelconque rapportées à trois axes parallèles aux précédents, on aura

$$(46) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} j_x &= -\omega^2 x - \lambda_\omega y, \\ j_y &= \lambda_\omega y - \omega^2 y - \lambda_N z, \\ j_z &= \lambda_N y, \end{aligned} \right.$$

expressions identiques aux formules (16). Il en résulte que *dans le mouvement d'un solide libre, à chaque instant, les accélérations des points sont les mêmes en grandeur et en direction que si le solide tournait autour du centre* C *des accélérations, supposé fixe, l'axe instantané et l'accélération angulaire conservant les mêmes grandeurs et les mêmes directions que dans le mouvement considéré.*

Dès lors, toutes les propriétés obtenues au § III subsisteront, en remplaçant le point fixe O par le centre des accélérations C. Ainsi, tous les points situés sur une droite passant par le point C

ont leurs accélérations parallèles et proportionnelles à leurs distances du point C. Le lieu des points d'égale accélération est un ellipsoïde de centre C, dont les droites CI′, CL′, Cμ' respectivement parallèles à OI, OL, Oμ sont trois diamètres conjugués. Le lieu des points dont l'accélération est normale au plan principal est la droite CI′; le lieu des points dont l'accélération est parallèle à l'axe OI est la droite Cμ', etc... La construction du numéro 19 pour l'accélération d'un point quelconque se fera de la même manière, etc. Nous pouvons donc considérer le problème de la détermination des accélérations des points d'un corps libre et de leur groupement géométrique comme entièrement résolu.

37. L'application des formules (46) à la construction du centre de courbure des trajectoires ne conduit plus, *en général*, à des résultats simples. Considérons d'abord le point du solide qui coïncide avec le point central O. Son accélération se compose de deux autres,

$$J_\omega = \frac{dQ}{dt}, \quad J_N = \omega w \sin \overline{\omega w} + \frac{Q\lambda_N}{\omega},$$

la première dirigée suivant OI, la seconde suivant ON. Mais la vitesse du point O est Q et est dirigée suivant OI, J_ω est donc la composante tangentielle de l'accélération, J_N la composante normale, ce qui montre que le plan osculateur de la trajectoire coïncide avec le plan principal. Au point de vue purement géométrique, il suffit de connaître les rapports des vitesses ω, w, Q à l'une d'entre elles. Nous poserons donc

$$\frac{w \sin \overline{\omega w}}{\omega} = \mu, \quad \frac{Q}{\omega} = q,$$

et nous aurons

$$J_N = \omega^2 (\mu + q \operatorname{tg} \overline{\omega\beta}),$$

en posant, comme au numéro 23,

$$\operatorname{tg} \overline{\omega\beta} = \frac{\lambda_N}{\omega^2}.$$

La droite $[\mu + q \operatorname{tg} \omega\beta]$ est facile à construire. Cela posé, R_0 étant le rayon de courbure cherché, l'expression connue de l'accélération normale donne

$$J_N = \frac{Q^2}{R_0}, \quad R_0 = \frac{Q^2}{\omega^2 (\mu + q \operatorname{tg} \overline{\omega\beta})},$$

ou enfin

$$(47) \quad \ldots\ldots\ldots \quad R_0 = \frac{q^2}{\mu + q \operatorname{tg} \overline{\omega\beta}}.$$

En mettant cette équation sous la forme

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{\frac{q^2}{\mu}} + \frac{1}{q \cot \overline{\omega\beta}}$$

on construira facilement le centre de courbure de la trajectoire du point O. En résumé : *Le rayon de courbure de la trajectoire décrite par le point du corps qui tombe au point central* O *est dirigé suivant la normale* ON *à la surface de Mozzi; et sa longueur est donnée par la formule* (47).

38. Soit P un autre point pris sur l'axe de Mozzi, à la distance ρ du point central. Sa vitesse sera toujours égale à Q, les équations (44) donneront

$$j_x = J_N, \quad j_y = \mp \lambda_N \rho, \quad j_z = J_\omega.$$

La composante tangentielle de l'accélération de P sera encore J_ω, sa composante normale j_n sera la résultante de deux autres,

$$J_N = \omega^2 (\mu + q \operatorname{tg} \overline{\omega\beta}), \qquad \mp \lambda_N \rho,$$

la première, constante et parallèle à ON, la seconde proportionnelle à OP, normale au plan principal, et dirigée *en arrière* de ce plan pour les points P pris sur la partie *positive* OI de

l'axe de Mozzi. Soit ψ l'angle que fait j_n avec ON; on trouvera

$$\operatorname{tg}\psi = \mp \frac{\lambda_N \rho}{\omega^2 (\mu + q \operatorname{tg}\overline{\omega\beta})} = \mp \frac{\rho \operatorname{tg}\overline{\omega\beta}}{\mu + q \operatorname{tg}\overline{\omega\beta}},$$

ce qui fera connaître la direction du rayon de courbure de la trajectoire du point P. Quant à ce rayon R lui-même, on aura

$$R = \frac{Q^2}{j_n}, \quad J_N = j_n \cos\psi,$$

d'où

$$R = \frac{Q^2}{J_N}\cos\psi = R_0 \cos\psi,$$

donc on a la propriété suivante : *Pour un point quelconque du corps pris sur l'axe de Mozzi, le rayon de courbure de la trajectoire est normal à cet axe; il fait avec le plan principal un angle dont la tangente est proportionnelle à la distance de ce point au point central, et sa longueur s'obtient en projetant, sur sa direction, le rayon de courbure* R_0 *de la trajectoire du point central lui-même.*

Dans le cas général (fig. 12), pour obtenir les composantes de l'accélération d'un point quelconque M suivant la direction de la vitesse v' due à la rotation autour de OI, suivant le rayon $MP = u$ abaissé sur cet axe, et parallèlement à OI, il suffira de joindre aux composantes de l'accélération due à la rotation autour du point O, qui sont données par les équations (31), les composantes respectives de l'accélération du point O, savoir :

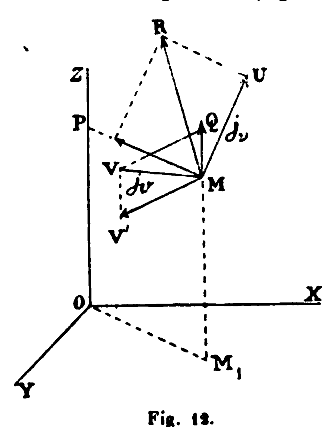


Fig. 12.

$$-J_N \sin\varphi, \qquad -J_N \cos\varphi, \qquad J_\omega.$$

φ désignant toujours l'angle du plan IOM avec le plan principal. Donc

$$(48) \quad \ldots \quad \begin{cases} j_{v'} = -J_N \sin\varphi + \lambda_\omega u - \lambda_N \rho_\omega \cos\varphi, \\ j_u = -J_N \cos\varphi + \omega^2 u + \lambda_N \rho_\omega \sin\varphi, \\ j_\omega = J_\omega + \lambda_N u \sin\varphi. \end{cases}$$

Mais il faut remarquer que la direction de la vitesse du point M n'est plus ici MV'; la vitesse v résulte en effet de v' et de Q parallèle à OI. On a donc

$$(49) \quad \ldots \quad \begin{cases} v = \sqrt{Q^2 + \omega^2 u^2} = \omega\sqrt{q^2 + u^2}, \\ \cos\overline{\omega v} = \dfrac{Q}{\omega\sqrt{q^2 + u^2}} = \dfrac{q}{\sqrt{q^2 + u^2}}, \\ \cos\overline{vv'} = \dfrac{\omega u}{\omega\sqrt{q^2 + u^2}} = \dfrac{u}{\sqrt{q^2 + u^2}}, \end{cases}$$

de sorte que pour obtenir la composante tangentielle j_v de l'accélération, il faut faire la somme des projections de $j_{v'}$ et de j_ω sur la direction MV, ce qui donnera

$$j_v = j_{v'} \cos\overline{vv'} + j_\omega \cos\overline{\omega v},$$

d'où

$$(50) \quad \ldots\ldots\ldots \quad j_v = \frac{u j_{v'} + q j_\omega}{\sqrt{q^2 + u^2}}.$$

De même, la composante j_ν de l'accélération suivant la direction MU perpendiculaire à MP et à MV, aura pour expression

$$j_\nu = \frac{u j_\omega - q j_{v'}}{\sqrt{q^2 + u^2}}.$$

MP et MU étant dans le plan normal à la trajectoire, l'accélération normale j_n du mobile sera la résultante de j_u et de j_ν, d'où il suit :



1° que la direction du rayon de courbure R de la trajectoire fait avec MP un angle $\overline{Ru}$ donné par la formule

$$\operatorname{tg} \overline{Ru} = \frac{j_\nu}{j_n} = \frac{uj_\omega - qj_v}{j_n \sqrt{q^2 + u^2}};$$

2° que le rayon de courbure lui-même a pour expression

$$R = \frac{v^2}{j_n} = \frac{\omega^2 (q^2 + u^2)}{\sqrt{j_n^2 + j_\nu^2}},$$

ou enfin

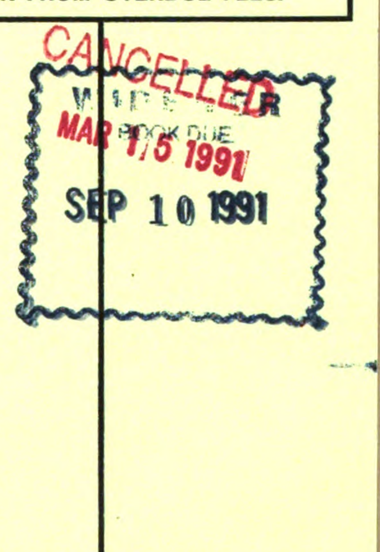
$$R = \frac{\omega^2 (q^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(q^2 + u^2) j_n^2 + (uj_\omega - qj_v)^2}}.$$

Il ne restera plus qu'à substituer dans les valeurs de tg $\overline{Ru}$ et de R les valeurs de j_v, j_ω, j_n données par les formules (48).

Mais cette substitution ne paraît pas conduire à des résultats élégants au point de vue de la construction géométrique.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.


3 2044 011 693 181


CANCELLED
BOOK DUE
MAR 15 1991
SEP 10 1991



